内 容 简 介

本书是大学数学的内容、方法与技巧丛书之一，对常微分方程的主要内容、基本方法与常用技巧进行了全面的讨论与分析，用大量的例题对所讨论的内容与方法作了演示与论证．全书的内容包括初等积分法、基本定理、线性微分方程、线性微分方程组、定性与稳定性概念及一阶偏微分方程．本书用简明易懂、通俗流畅的语言深入浅出地诠释概念、解析疑难、演绎方法与技巧，帮助读者理解与熟悉常微分方程的基本概念与理论，培养读者运用常微分方程方法分析问题与解决问题的能力．本书与教材同步，在方法与技巧上略有拓宽与提高，是大学生、工程技术人员与经济分析人员必备的、读之有益的一本好书．

前　言

常微分方程是数学的一个分支，在工程技术领域、经济分析领域及其他许多学科领域中有广泛的应用并显示出十分重要的作用. 它常常既是研究的起点，又是基本的工具. 因此，理解与熟悉常微分方程的基本理论，掌握解决常微分方程的基本方法，熟练求解常微分方程问题的常用技巧是非常必要的. 本书就是为帮助读者克服学习中的困难，尽可能更好地获取本门课程的精髓而编写的.

本书按章节编排，分为主要内容、疑难解析和方法、技巧与典型例题分析三个部分. 主要内容包括初等积分法、基本定理、线性微分方程、线性微分方程组、定性与稳定性概念及一阶偏微分方程，基本依据东北师范大学数学系编写、高等教育出版社出版的《常微分方程》凝炼归纳. 疑难解析部分则考虑到读者在学习过程中可能遇到的关于理论与方法的各种问题，进行了认真的分析解答. 方法、技巧与典型例题分析部分不仅对所选教材中的习题作了全面完整的解答外，还补充了大量的、典型的例题，对常微分方程的基本方法与常用技巧作了演绎叙述，使本书的内容比教材有所提高与拓宽. 在本书的编写中，作者力求以简明易懂、通俗流畅的语言深入浅出地诠释概念、解析疑难、展示方法与演绎技巧，帮助读者理解与熟悉常微分方程的基本概念与理论，培养读者运用常微分方程方法分析问题与解决问题的实际能力. 相信本书能成为大学生、研究生、工程技术人员感受到开卷有益的好书.

本书在编写过程中参阅了其他有关著作，在此向这些著作的

作者们表示诚挚的谢意.本书得以出版,还要感谢华中科技大学出版社领导与编辑的大力支持,编辑与出版人员为本书做了大量的精细的工作,使本书能较好地奉献给读者.

由于学识与水平所限,错漏之处在所难免,恳请读者批评指正.

作　者

2006 年 5 月

目　录

第一章　初等积分法 …………………………………………………………（1）
第一节　微分方程与解……………………………………………………（1）
主要内容……………………………………………………………（1）
疑难解析……………………………………………………………（2）
方法、技巧与典型例题分析 ……………………………………………（4）
第二节　变量可分离方程……………………………………………（8）
主要内容……………………………………………………………（8）
疑难解析……………………………………………………………（9）
方法、技巧与典型例题分析 ……………………………………………（9）
第三节　齐次方程…………………………………………………（15）
主要内容……………………………………………………………（15）
疑难解析……………………………………………………………（16）
方法、技巧与典型例题分析 ……………………………………………（17）
第四节　一阶线性方程……………………………………………（26）
主要内容……………………………………………………………（26）
疑难解析……………………………………………………………（27）
方法、技巧与典型例题分析 ……………………………………………（28）
第五节　全微分方程及积分因子……………………………………（37）
主要内容……………………………………………………………（37）
疑难解析……………………………………………………………（38）
方法、技巧与典型例题分析 ……………………………………………（41）
第六节　线素场　欧拉折线……………………………………（49）
主要内容……………………………………………………………（49）
疑难解析……………………………………………………………（50）
方法、技巧与典型例题分析 ……………………………………………（51）
第七节　一阶隐式微分方程……………………………………（56）
主要内容……………………………………………………………（56）
疑难解析……………………………………………………………（57）
方法、技巧与典型例题分析 ……………………………………………（60）
第八节　一阶微分方程的等角轨线与应用……………………………（71）

主要内容…………………………………………………………………………（71）
疑难解析…………………………………………………………………………（71）
方法、技巧与典型例题分析 ………………………………………………………（72）
第九节 几种可降阶的高阶方程………………………………………………（82）
主要内容…………………………………………………………………………（82）
疑难解析…………………………………………………………………………（82）
方法、技巧与典型例题分析 ………………………………………………………（84）
第二章 基本定理 ………………………………………………………………（96）
第一节 解的存在性与唯一性定理……………………………………………（96）
主要内容…………………………………………………………………………（96）
疑难解析…………………………………………………………………………（97）
方法、技巧与典型例题分析 ………………………………………………………（98）
第二节 解的延展 ……………………………………………………………（109）
主要内容 ………………………………………………………………………（109）
疑难解析 ………………………………………………………………………（109）
方法、技巧与典型例题分析………………………………………………………（111）
第三节 解对初值的连续依赖性 ……………………………………………（124）
主要内容 ………………………………………………………………………（124）
疑难解析 ………………………………………………………………………（125）
方法、技巧与典型例题分析………………………………………………………（126）
第四节 解对初值的可微性 …………………………………………………（130）
主要内容 ………………………………………………………………………（130）
疑难解析 ………………………………………………………………………（130）
方法、技巧与典型例题分析………………………………………………………（131）
第三章 线性微分方程 …………………………………………………………（137）
第一节 线性方程的一般性质 ………………………………………………（137）
主要内容 ………………………………………………………………………（137）
疑难解析 ………………………………………………………………………（138）
方法、技巧与典型例题分析………………………………………………………（139）
第二节 n 阶线性齐次微分方程 ……………………………………………（142）
主要内容 ………………………………………………………………………（142）
疑难解析 ………………………………………………………………………（144）
方法、技巧与典型例题分析………………………………………………………（147）
第三节 n 阶线性非齐次方程 ………………………………………………（154）

主要内容 …………………………………………………………………………… (154)
疑难解析 …………………………………………………………………………… (155)
方法、技巧与典型例题分析………………………………………………………… (156)
第四节　n 阶常系数线性齐次方程解法 ……………………………………… (164)
主要内容 …………………………………………………………………………… (164)
疑难解析 …………………………………………………………………………… (166)
方法、技巧与典型例题分析………………………………………………………… (167)
第五节　n 阶常系数线性非齐次方程解法 …………………………………… (176)
主要内容 …………………………………………………………………………… (176)
疑难解析 …………………………………………………………………………… (177)
方法、技巧与典型例题分析………………………………………………………… (178)
第六节　拉普拉斯变换 …………………………………………………………… (190)
主要内容 …………………………………………………………………………… (190)
疑难解析 …………………………………………………………………………… (193)
方法、技巧与典型例题分析………………………………………………………… (194)
第七节　二阶常系数线性方程与振动现象 …………………………………… (201)
主要内容 …………………………………………………………………………… (201)
疑难解析 …………………………………………………………………………… (203)
方法、技巧与典型例题分析………………………………………………………… (203)
第八节　幂级数解法大意 ………………………………………………………… (213)
主要内容 …………………………………………………………………………… (213)
疑难解析 …………………………………………………………………………… (215)
方法、技巧与典型例题分析………………………………………………………… (215)
第四章　线性微分方程组 ……………………………………………………… (224)
第一节　一阶微分方程组　线性微分方程组的一般概念 ………… (224)
主要内容 …………………………………………………………………………… (224)
疑难解析 …………………………………………………………………………… (228)
方法、技巧与典型例题分析………………………………………………………… (231)
第二节　线性齐次方程组的一般理论 ………………………………………… (237)
主要内容 …………………………………………………………………………… (237)
疑难解析 …………………………………………………………………………… (239)
方法、技巧与典型例题分析………………………………………………………… (241)
第三节　线性非齐次方程组的一般理论 ……………………………………… (248)
主要内容 …………………………………………………………………………… (248)

疑难解析 …………………………………………………………… (250)
方法、技巧与典型例题分析…………………………………………… (250)
第四节　常系数线性微分方程组的解法 ………………………… (258)
主要内容 …………………………………………………………… (258)
疑难解析 …………………………………………………………… (260)
方法、技巧与典型例题分析…………………………………………… (262)
第五章　定性与稳定性概念 ……………………………………… (312)
第一节　相平面作图　初等奇点附近的轨线分布 ………………… (312)
主要内容 …………………………………………………………… (312)
疑难解析 …………………………………………………………… (317)
方法、技巧与典型例题分析…………………………………………… (318)
第二节　极限环举例 ……………………………………………… (330)
主要内容 …………………………………………………………… (330)
疑难解析 …………………………………………………………… (330)
方法、技巧与典型例题分析…………………………………………… (331)
第三节　稳定性概念 ……………………………………………… (343)
主要内容 …………………………………………………………… (343)
疑难解析 …………………………………………………………… (346)
方法、技巧与典型例题分析…………………………………………… (348)
第六章　一阶偏微分方程初步 …………………………………… (367)
第一节　一阶常微分方程组的首次积分 ………………………… (367)
主要内容 …………………………………………………………… (367)
疑难解析 …………………………………………………………… (369)
方法、技巧与典型例题分析…………………………………………… (370)
第二节　一阶线性齐次偏微分方程 ……………………………… (378)
主要内容 …………………………………………………………… (378)
疑难解析 …………………………………………………………… (380)
方法、技巧与典型例题分析…………………………………………… (384)
第三节　一阶拟线性齐次偏微分方程 …………………………… (396)
主要内容 …………………………………………………………… (396)
疑难解析 …………………………………………………………… (396)
方法、技巧与典型例题分析 ………………………………………… (399)

第一章　初等积分法

某些类型的微分方程的求解问题能够化为初等函数的积分问题，用积分的方法求微分方程的解，称为初等积分法. 本章将介绍一些可用初等积分法求解微分方程的类型及其方法与技巧.

第一节　微分方程与解

主要内容

1. 联系自变量、未知函数以及未知函数的某些导数(或微分)之间的关系式称为**微分方程**.

未知函数是一元函数的微分方程称为**常微分方程**，未知函数是多元函数的微分方程称为**偏微分方程**.

2. 微分方程中所含未知函数的导数的最高阶数称为微分方程的**阶**. 它是常微分方程分类的一个基本依据.

3. $F(x,y,y')=0$ 称为**一阶隐方程**.

$y'=f(x,y)$称为**一阶显方程**.

$M(x,y)\mathrm{d}x+N(x,y)\mathrm{d}y=0$ 称为**微分形式**的一阶方程.

$$y^{(n)}=f(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)}) \tag{①}$$

称为 n **阶显式方程**.

$$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0 \tag{②}$$

称为 n **阶隐式方程**.

4. **定义 1**　设函数 $y=y(x)$在$[a,b]$上有定义，且存在 n 阶导数，能使

$$F(x, y(x), y'(x), \cdots, y^{(n)}(x))=0$$

成为区间$[a,b]$上的恒等式，则称$y=y(x)$为方程②在$[a,b]$上的一个解.

对于其他形式的方程或区间，也可作相应的叙述.

解的图像称为微分方程的**积分曲线**.

5. n阶常微分方程的含有n个任意常数$C_1, C_2, \cdots, C_n$的解

$$y=\varphi(x, C_1, C_2, \cdots, C_n)$$

称为该方程的**通解**. 由隐式表出的通解称为**通积分**.

用来确定通解中任意常数的条件称为**初始条件**. n阶常微分方程的初始条件通常写成

$$y(x_0)=y_0, \quad y'(x_0)=y'_0, \quad \cdots, \quad y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}.$$

n阶常微分方程的满足初始条件的解称为**特解**. 由隐式表出的特解称为**特积分**.

6. 求微分方程的满足初始条件的解的问题称为**初值问题**. 初值问题也常称为柯西(Cauchy)问题.

疑难解析

1. 微分方程与其他方程有何不同?

答 通常把表达未知量所必须满足某种条件的含有未知量的等式称为方程. 方程可以按对未知量所施加的数学运算进行分类，如

$$x^2-3x+1=0, \quad \sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2+1}=1$$

中对未知量x施加了代数运算，因此它们称为**代数方程**.

$$\sin 2x+\cos 3x=1, \quad e^x=x^2-1$$

中含有未知量x的超越函数，因此它们称为**超越方程**.

$$y''-2y'-3y=e^x, \quad y'''+2y''-y'+y=\sin x+1$$

中的未知量是未知函数y，且对y施加了导数(或微分)运算，所以它们称为**微分方程**.

2. 怎样理解微分方程解的几何意义？

答 由于求解微分方程开始时常用积分方法，因而习惯称微分方程的通解为通积分. 一阶微分方程的通积分是一函数族，每个函数的图形都是一条曲线，也称为积分曲线，通积分称为曲线族. 而特解是通过特定点的一条曲线.

一般地，一阶微分方程的通积分是一个单参数的曲线族. 如 $s=\frac{1}{2}gt^2+C$ 是微分方程 $\frac{ds}{dt}=gt$ 的通积分，由 C 的不同，对应一族抛物线. 而 n 阶微分方程的通积分是含有 n 个参数的曲线族.

微分方程的解所表示的积分曲线在微分方程所确定的方向场中有几何解释，在微分方程研究中也起着重要的作用.

设有微分方程 $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$，若 $f(x,y)$ 在 xOy 平面的某区域 D 上有定义，在区域 D 上任一点 $M(x_0,y_0)$，以此点的函数值 $f(x_0,y_0)$ 为斜率作一个方向（直线段），则称区域 D 连同函数 $f(x,y)$ 在 D 上各点处的方向为所给方程在 D 上的**方向场**. 方程 $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ 的积分曲线上每点的切线方向，均与方程所确定的方向场在该点的方向相同.

事实上，若 $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ 的积分曲线为 $y=\varphi(x)$，则曲线上任一点 $M(x,\varphi(x))$ 处的切线斜率为 $\frac{d\varphi(x)}{dx}=f(x,\varphi(x))$，而方向场在点 $M(x,\varphi(x))$ 的方向斜率按方向场定义也是 $f(x,\varphi(x))$. 曲线的切线斜率与方向场斜率相同，说明积分曲线在点 $M(x,\varphi(x))$ 处与方向场该点的方向相切. 反之，若在区域 D 上有一曲线 $y=\varphi(x)$ 在各点处的切线均与该点方向场的方向一致，则 $y=\varphi(x)$ 必是已知方程的一条积分曲线.

积分曲线的这一性质，提供了确定积分曲线的几何依据，方便了对解的研究. 在方程无法求解时，可通过在方向场上画积分曲线的方法找出近似解.

方法、技巧与典型例题分析

要求熟悉关于常微分方程的解、通解和特解等基本概念，能够验证微分方程的解，并学会建立一些简单的微分方程.

例 1 验证给出的函数是否为相应微分方程的解：

(1) $5\dfrac{dy}{dx}=3x^2+5x, y=\dfrac{x^3}{5}+\dfrac{x^2}{2}+C$；

(2) $\dfrac{dy}{dx}=p(x)y, p(x)$连续，$y=Ce^{\int p(x)dx}$；

(3) $(x+y)dx+xdy=0, y=(C^2-x^2)/(2x)$；

(4) $y''=x^2+y^2, y=1/x$.

解 只需对给出的函数求导，然后代入验证即可.

(1) 是. 因为 $y'=3x^2/5+x$，所以

$$5\frac{dy}{dx}=3x^2+5x.$$

(2) 是. 因为 $y'=Ce^{\int p(x)dx}p(x)$，所以

$$\frac{dy}{dx}=Ce^{\int p(x)dx}p(x)=p(x)y.$$

(3) 是. 因为 $y'=-\dfrac{C^2}{2x^2}-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{C^2+x^2}{x^2}\right)$，即

$$x\frac{dy}{dx}=-\frac{C^2+x^2}{2x}=-\frac{C^2-x^2+2x^2}{2x}=-\frac{C^2-x^2}{2x}-x=-(y+x),$$

所以
$$(x+y)dx+xdy=0.$$

(4) 不是. 因为 $y'=-\dfrac{1}{x^2}, y''=\dfrac{2}{x^3}$，所以

$$y''=\frac{2}{x^3}\neq x^2+y^2.$$

例 2 证明：函数 $y=\dfrac{1}{x^2-1}$ 在区间 $(-1,1)$ 内是方程 $y'+2xy^2=0$ 的一个解，但任何包含 -1 或 1 的点的区间不是它的定义区间.

证 在$(-1,1)$内，$y=\dfrac{1}{x^2-1}$与$y'=-\dfrac{2x}{(x^2-1)^2}$都有定义，代入方程得

$$y'+2xy^2=-\frac{2x}{(x^2-1)^2}+2x\left(\frac{1}{x^2-1}\right)^2=0,$$

所以，$y=\dfrac{1}{x^2-1}$在区间$(-1,1)$内是方程的一个解.

但$y=\dfrac{1}{x^2-1}$在点$x=\pm1$无定义，所以任何包含-1或1的区间都不是解的定义区间.

例3 验证所给二元方程确定的函数为所给微分方程的解：

(1) $(x-2y)y'=2x-y$，$x^2-xy+y^2=C$；

(2) $(xy-x)y''+xy'^2+yy'-2y'=0$，$y=\ln(xy)$.

解 对二元方程求导，将结果代入微分方程验证.

(1) 将方程$x^2-xy+y^2=C$两端对x求导，得

$$2x-y-xy'+2yy'=0 \Rightarrow y'=(2x-y)/(x-2y),$$

知$x^2-xy+y^2=C$确定函数是所给微分方程的解.

(2) 将方程$y=\ln(xy)$两端对x求导，得

$$y'=1/x+y'/y \Rightarrow y'=y/(xy-x),$$

$$y''=(-xy^3+2xy^2-2xy)/(xy-x)^3,$$

代入得 $$(xy-x)y''+xy'^2+yy'-2y'=0.$$

知$y=\ln(xy)$确定函数是所给微分方程的解.

例4 确定函数关系式中的参数，使满足所给初始条件：

(1) $y=(C_1+C_2x)e^{2x}$，$y(0)=0$，$y'(0)=1$；

(2) $y=C_1\sin(x-C_2)$，$y(\pi)=1$，$y'(\pi)=0$.

解 将初始条件代入函数式及其导数式，即可确定参数值.

(1) 因为$y=(C_1+C_2x)e^{2x}$，$y'=C_2e^{2x}+2(C_1+C_2x)e^{2x}$，代入初始条件得

$$\begin{cases}C_1=0,\\ C_2+2C_1=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}C_1=0,\\ C_2=1,\end{cases}$$

故 $$y=xe^{2x}.$$

(2) 因为 $y=C_1\sin(x-C_2)$，$y'=C_1\cos(x-C_2)$，代入初始条件得

$$\begin{cases}C_1\sin(\pi-C_2)=C_1\sin C_2=1,\\ C_1\cos(\pi-C_2)=-C_1\cos C_2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C_1=1,\\ C_2=\pi/2,\end{cases}$$

故 $$y=\sin(x-\pi/2)=-\cos x.$$

n 阶微分方程的通解含有 n 个独立常数（称为参数），它在几何上表示一个有 n 个参数的曲线族．反之，一个含有 n 个独立参数的曲线族必伴随一个 n 阶微分方程．此微分方程可以由所给 n 个参数的曲线族微分 n 次，然后从 $n+1$ 个方程中消去 n 个独立参数而得到．

例 5 求下列单参数曲线族所满足的微分方程：

(1) $y=Cx+C^2$； (2) $ay^2=(x-C)^3$；

(3) $C(y+C)^2=x^3$.

解 (1) 对 $y=Cx+C^2$ 两端对 x 求导，得 $C=\dfrac{dy}{dx}$. 代入原式，得

$$y=x\frac{dy}{dx}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

即为所求微分方程．

(2) 对 $ay^2=(x-C)^3$ 两端对 x 求导，得

$$2ay\frac{dy}{dx}=3(x-C)^2,$$

代入原式，得所求微分方程为

$$ay^2=\left[\left(\frac{2}{3}ay\frac{dy}{dx}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^3 \quad 或 \quad 27y=8a\left(\frac{dy}{dx}\right)^3.$$

(3) 将原式改写为 $\sqrt{C}(y+C)=x^{3/2}$，再两端对 x 求导，得

$$\sqrt{C}\frac{dy}{dx}=\frac{3}{2}x^{1/2} \quad 或 \quad C=\frac{9}{4}x\bigg/\left(\frac{dy}{dx}\right)^2,$$

代入原式，得所求微分方程为

$$12\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 y=\left[8\left(\frac{dy}{dx}\right)^3-27\right]x.$$

例 6 求下列双参数曲线族所满足的微分方程：

(1) $xy=C_1e^x+C_2e^{-x}$； (2) $y^2=C_1(C_2^2-x^2)$.

解 (1) 将 $xy=C_1e^x+C_2e^{-x}$ 两端对 x 求导，得

$$y+x\frac{dy}{dx}=C_1e^x-C_2e^{-x},$$

$$2\frac{dy}{dx}+x\frac{d^2y}{dx^2}=C_1e^x+C_2e^{-x}.$$

解得
$$C_2=\left(xy-y-x\frac{dy}{dx}\right)\Big/(2e^{-x}),$$

$$C_1=\left(y+\frac{x}{2}\frac{dy}{dx}+\frac{1}{2}xy-\frac{1}{2}y\right)\Big/e^x.$$

代入原式，得所求微分方程为

$$x\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}-xy=0.$$

(2) 将 $y^2=C_1(C_2^2-x^2)$ 两端对 x 求导，得

$$y\frac{dy}{dx}=-C_1x \quad 和 \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2+y\frac{d^2y}{dx^2}=-C_1,$$

解得
$$xy\frac{d^2y}{dx^2}+x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-y\frac{dy}{dx}=0.$$

上式即为所求微分方程.

建立微分方程并确定初始条件是比较困难的，往往需要借助几何、物理、化学、力学等许多方面的知识，在以后的章节中将逐渐予以介绍.

例 7 设一曲线上某点处的切线、切点到原点的向径及 x 轴围成一个以 x 轴为底边的等腰三角形(图 1.1)，且曲线通过点(1,2). 求该曲线方程所满足的微分方程及定解条件.

解 设曲线方程为 $y=y(x)$，$A(x,y)$ 为曲线上任意点，则过点 A 的切线方程为 $Y-y=\frac{dy}{dx}(X-x)$，所以点 B 坐标为 $\left(x-\frac{1}{y'}y,0\right)$. 由题意 $|AO|=|AB|$，故

$$\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(y/y')^2+y^2},\\ y(1)=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y'=-\dfrac{y}{x},\\ y(1)=2\end{cases}$$

即为所求微分方程及定解条件.

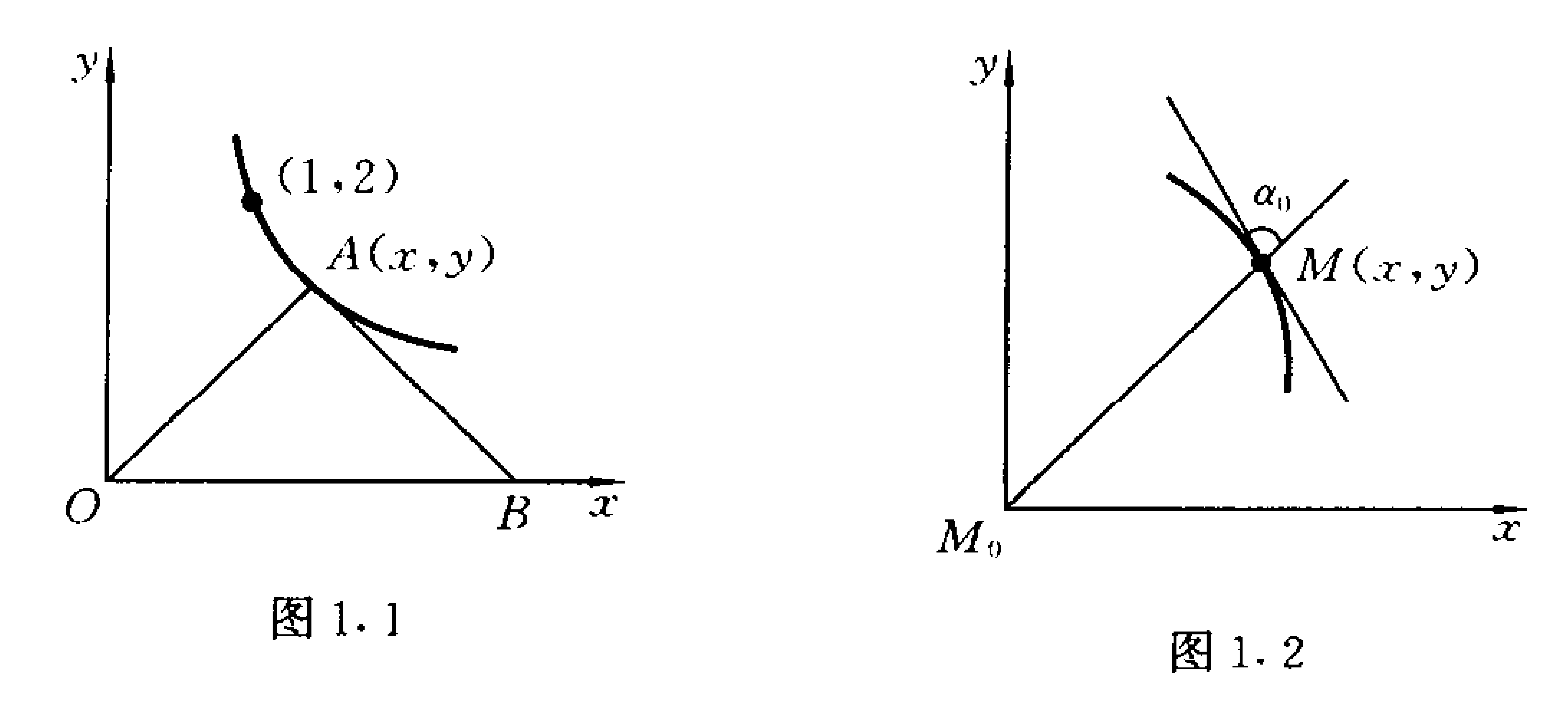


图 1.1　　图 1.2

例 8　设一平面曲线经过定点 M_0，且曲线上任一点 M(M_0 除外)的切线与直线 M_0M 的交角恒为 α_0. 求此曲线方程所满足的微分方程.

解　以 M_0 为坐标原点，建立直角坐标系如图 1.2 所示. 设曲线方程为 $y=y(x)$，则

$$\tan\alpha_0=\left(y'-\frac{y}{x}\right)\Big/\left(1+\frac{yy'}{x}\right),$$

整理，得微分方程

$$y'=\frac{x\tan\alpha_0+y}{x-y\tan\alpha_0}.$$

第二节　变量可分离方程

主 要 内 容

1. 形如$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x)\varphi(y)$的方程称为变量可分离方程. 其通解

由

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{\varphi(y)} = \int f(x)\mathrm{d}x + C \qquad ①$$

表出. 式①是方程通解的**隐式表达式**,又称为**通积分**. 方程除通积分外,可能还有**常数解**.

2. 变量可分离方程的微分形式为

$$M(x)N(y)\mathrm{d}x + P(x)Q(y)\mathrm{d}y = 0,$$

此时,x 和 y 均可为自变量或函数,通积分为

$$\int \frac{M(x)}{P(x)}\mathrm{d}x + \int \frac{Q(y)}{N(y)}\mathrm{d}y = C \quad (N(y) \cdot P(x) \neq 0).$$

疑 难 解 析

为什么变量可分离方程除了通积分外,有时可能还有常数解?

答 在非线性微分方程的解中,有时会出现一些通积分之外的常数解,称之为**奇解**. 出现奇解的原因有两种:

(1) 对$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)\varphi(y)$型方程,因为求通积分时令 $\varphi(y) \neq 0$,故 $\varphi(y) = 0$ 时的实根 $y = y_1, y = y_2, \cdots, y = y_n$ 也是方程的解(常数解).

(2) 对 $M(x)N(y)\mathrm{d}x + P(x)Q(y)\mathrm{d}y = 0$ 型,因为求通积分时令$N(y) \neq 0$ 和$P(x) \neq 0$,故$P(x) = 0, N(y) = 0$ 的实根也是方程的解(常数解).

有时,可以通过取通积分中任意常数C 为零,将方程的常数解包含进去. 解题时要注意不要将常数解遗漏.

方法、技巧与典型例题分析

求解变量可分离的微分方程,关键是正确地分离变量与计算不定积分,要理解隐式解存在的根据是隐函数求导法则,并应该注

意不要遗漏可能存在的常数解.

例 1 求下列可分离变量微分方程的通解：

(1) $\frac{dy}{dx}=y\ln y$; (2) $\frac{dy}{dx}=y\ln x$;

(3) $\frac{dy}{dx}=e^{x-y}$; (4) $\tan y dx-\cot x dy=0$;

(5) $\frac{dy}{dx}=\frac{x^2}{y(1+x^3)}$; (6) $\frac{dy}{dx}=(\cos x\cos 2y)^2$.

解 (1) 设 $y\neq 1$,分离变量,得

$$\frac{dy}{y\ln y}=dx,$$

两端积分,得 $\ln|\ln y|=x+C_1$,

即通解为 $\ln y=Ce^x$ 或 $y=e^{Ce^x}$(C 为任意常数).

$y=1$ 也是方程的解(可以令 $C=0$ 得到).

(2) 分离变量,得

$$\frac{dy}{y}=\ln x dx \quad (y\neq 0),$$

两端积分,得 $\ln y=x(\ln x-1)+C$,

即通解为 $y=Ce^{x(\ln x-1)}$ (C 为任意常数).

$y=0$ 也是方程的解(可以令 $C=0$ 得到).

下文不再注明 C 为任意常数.

(3) 分离变量,得

$$e^y dy=e^x dx,$$

两端积分,得 $e^y=e^x+C$ 即为通解.

(4) 分离变量,得

$$\frac{dx}{\cot x}=\frac{dy}{\tan y},$$

两端积分,得 $\sin y\cos x=C$ 即为通解.

(5) 分离变量,得

$$y dy=\frac{x^2}{1+x^3}dx,$$

两端积分，得 $$\frac{y^2}{2}=\frac{1}{3}\ln|1+x^3|+C_1,$$

即通解为 $y^2=\frac{2}{3}\ln|1+x^3|+C\ (x\neq-1,y\neq0)$.

(6) 分离变量，得

$$\frac{dy}{(\cos2y)^2}=(\cos x)^2dx\quad(\cos2y\neq0),$$

两端积分，得 $$\frac{1}{2}\tan2y=\frac{1}{2}(x+\sin x\cos x)+C_1,$$

即通解为 $$\tan2y=x+\sin x\cos x+C.$$

$\cos2y=0$，即 $y=\pi/4+n\pi/2\ (n\in\mathbf{N})$ 也是方程的解.

例 2 求下列方程满足初始条件的解：

(1) $\frac{dy}{dx}=y(y-1),y(0)=1$;

(2) $(x^2-1)y'+2xy^2=0,y(0)=1$;

解 (1) 分离变量，并写为

$$\left(\frac{1}{y-1}-\frac{1}{y}\right)dy=dx,$$

两端积分，得 $$\frac{y-1}{y}=Ce^x.$$

代入 $y(0)=1$，解得 $C=0$. 于是，特解为

$$y=1.$$

(2) **解法一** 分离变量，得

$$-\frac{1}{y^2}dy=\frac{2x}{x^2-1}dx,$$

两端积分，得 $$\frac{1}{y}=\ln|x^2-1|+C.$$

代入 $y(0)=1$，解得 $C=1$. 于是，特解为

$$y=\frac{1}{1+\ln|x^2-1|}.$$

解法二 也可用定积分方法求解. 由

$$\int_1^y -\frac{1}{y^2}dy=\int_0^x \frac{2x}{x^2-1}dx$$

即得特解 $$y=\frac{1}{1+\ln|x^2-1|}.$$

例 3 求解方程

$$x\sqrt{1-y^2}dx+y\sqrt{1-x^2}dy=0.$$

解 分离变量，得

$$\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{-ydy}{\sqrt{1-y^2}}\quad(x\neq\pm1,y\neq\pm1),$$

两端积分，得 $\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}=C\quad(C>0)$.

当 $y=\pm1$ 时，$-1\leqslant x\leqslant1$；当 $x=\pm1$ 时，$-1\leqslant y\leqslant1$.

例4 求一曲线，使其上每一点的切线斜率为该点横坐标的两倍，且通过点 $P(3,4)$.

解 由题意，列出初值问题

$$\begin{cases}y'=2x,\\ y(3)=4.\end{cases}$$

分离变量后两端积分，得

$$y=x^2+C,$$

代入 $y(3)=4$，解得 $C=-5$. 于是，曲线方程为

$$y=x^2-5.$$

例5 求一曲线，使其有如下性质：曲线上各点处的切线，切点到原点的向径及 x 轴可围成一个等腰三角形（以 x 轴为底），且通过点(1,2).

解 由第一节例 7 知，所求问题为

$$\begin{cases}\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x},\\ y(1)=2.\end{cases}$$

分离变量后再两端积分，得 $xy=C$. 代入 $y(1)=2$，得 $C=2$. 故所求曲线方程为

$$xy=2.$$

例 6 人工繁殖细菌，其增长速度和当时的细菌数成正比.

(1) 如果过4 h 的细菌数为原细菌数的2倍，那么经过12 h 应有多少个？

(2) 如果3 h 的时候，有细菌10^4个，在5 h 的时候有4×10^4个，那么在开始时有多少个？

解 设时刻t的单位体积的细菌数为$x(t)$，则增长速度为$\frac{dx}{dt}$. 由题意，得

$$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=kx \quad (k>0),\\ x(0)=x_0.\end{cases}$$

求得$x(t)$的方程为 $x=x_0e^{kt}$.

(1) 由题意得 $x_0e^{4k}=2x_0$，即$e^{4k}=2$.

故12 h 后，细菌数为

$$x=x_0e^{12k}=8x_0 \quad (\text{个/单位体积}).$$

(2) 由题意得

$$\begin{cases}10^4=x_0e^{3k},\\ 4\times10^4=x_0e^{5k},\end{cases}$$

从而解得 $x_0=1.25\times10^3$ （个/单位体积）.

例 7 一高为1 m 的半球形容器内装满水，水从其底部小孔中流出. 设小孔横截面面积为1 cm^2. 求水从小孔流出过程中水面高度h随时间变化的规律.

解 水从孔口流出的流量Q有以下公式

$$Q=\frac{dV}{dt}=0.62S\sqrt{2gh},$$

其中V为通过小孔的水的体积，S为孔口横截面面积，g为重力加速度. 于是，得

$$\frac{dV}{dt}=0.62\sqrt{2gh}.$$

又在Δt时间内，容器内水面落差为$\mathrm{d}h$ ($\mathrm{d}h<0$)，有

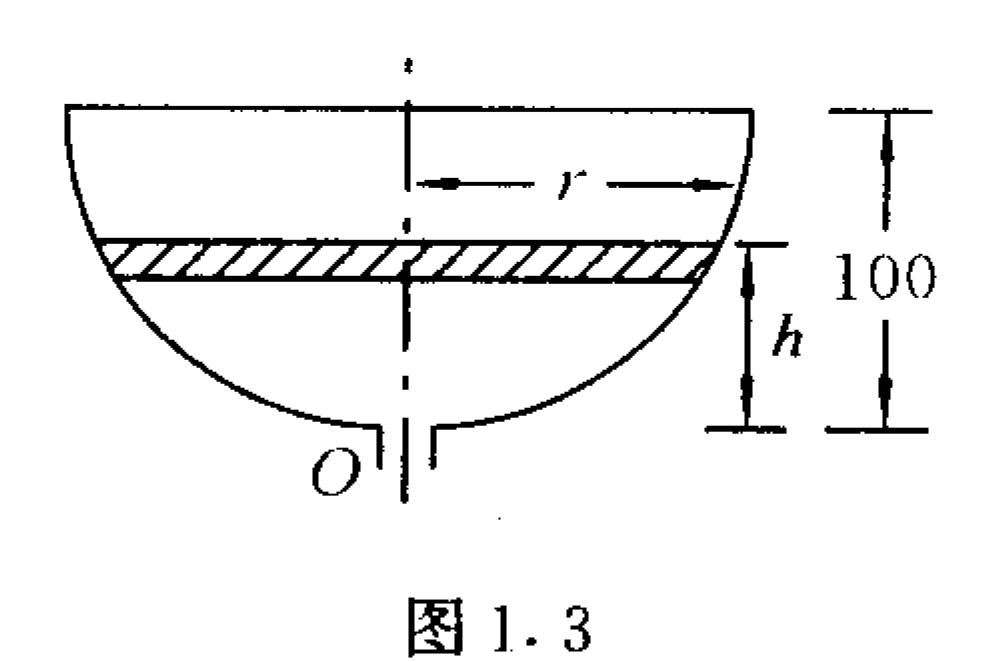


图 1.3

$$\mathrm{d}V=-\pi r^2\mathrm{d}h,$$

其中r为时刻t时容器内水面圆半径(图 1.3).

由 $$r=\sqrt{100^2-(100-h)^2}=\sqrt{200h-h^2},$$

得 $$\mathrm{d}V=-\pi(200h-h^2)\mathrm{d}h,$$

从而得水面高度函数$h=h(t)$应满足微分方程为

$$\begin{cases}0.62\sqrt{2gh}\mathrm{d}t=-\pi(200h-h^2)\mathrm{d}h,\\ h(0)=100.\end{cases}$$

分离变量，得

$$\mathrm{d}t=-\frac{\pi}{0.62\sqrt{2g}}(200h^{1/2}-h^{3/2})\mathrm{d}h,$$

两端积分，得

$$t=-\frac{\pi}{0.62\sqrt{2g}}\left(\frac{400}{3}h^{3/2}-\frac{2}{5}h^{5/2}\right)+C.$$

代入$h(0)=100$，解得

$$C=\frac{\pi}{0.62\sqrt{2g}}\times\frac{14}{15}\times10^5.$$

于是，得水从小孔流出过程中容器内水面高度h与时间t的函数关系为

$$t=\frac{\pi}{4.65\sqrt{2g}}(7\times10^5-10^3h^{3/2}+3h^{5/2}).$$

例 8 变量可分离方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x)g(y)\quad(a<x<b,c<y<d),$$

其中$f(x)$，$g(y)$为连续函数，且$g(y)\neq0$，证明：$\forall(x_0,y_0)\in\mathbf{R}^2$，方程满足$y(x_0)=y_0$，且存在唯一解.

证　设初值问题$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x)g(y)$，$y(x_0)=y_0$有解$y=\varphi(x)$，则有

$$\frac{\mathrm{d}\varphi(x)}{\mathrm{d}x}=f(x)g(\varphi(x)),$$

分离变量后积分，得

$$\int_{y_0}^{\varphi(x)}\frac{\mathrm{d}(\varphi(t))}{g(\varphi(t))}=\int_{x_0}^{x}f(t)\mathrm{d}t.$$

设$G(y)$与$F(x)$分别为$\frac{1}{g(y)}$与$f(x)$的一个原函数，则有

$$G(\varphi(x))-G(y_0)=F(x)-F(x_0).$$

由$G'(y)=1/g(y)\neq 0$知，$g(y)$是单调函数，故解得

$$\varphi(x)=G^{-1}[F(x)-F(x_0)+G(y_0)],$$

即知解是唯一存在的.

第三节　齐次方程

主要内容

1. 形如　$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f\left(\frac{y}{x}\right)$的方程称为**齐次方程**.

作变量代换$u=y/x$，可化为变量可分离的方程

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{f(u)-u}{x},$$

其通积分为　$C_1x=\mathrm{e}^{\int\frac{\mathrm{d}u}{f(u)-u}}$，即

$$x=C\mathrm{e}^{\varphi\left(\frac{y}{x}\right)}\quad\left(\varphi(u)=\int\frac{\mathrm{d}u}{f(u)-u}\right).$$

2. 形如$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f\left(\frac{ax+by}{a_1x+b_1y}\right)$的方程也是齐次方程.

对$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right)$，令$x=\xi+\alpha$，$y=\eta+\beta$($\alpha$，$\beta$为待定常

数)，可得

$$\frac{d\eta}{d\xi}=f\left(\frac{a\xi+b\eta+a\alpha+b\beta+c}{a_1\xi+b_1\eta+a_1\alpha+b_1\beta+c_1}\right),$$

选取 α 和 β，使得

$$\begin{cases}a\alpha+b\beta+c=0,\\a_1\alpha+b_1\beta+c_1=0.\end{cases}$$

当 $\Delta=ab_1-ba_1\neq0$ 时，α,β 有唯一解，化上面方程为齐次方程

$$\frac{d\eta}{d\xi}=f\left(\frac{a\xi+b\eta}{a_1\xi+b_1\eta}\right).$$

求解此方程，并用 $\xi=x-\alpha,\eta=y-\beta$ 代回，即得方程 $\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right)$ 的解.

当 $\Delta=0$ 时，若 $b_1=0$，则 a_1 与 b 中至少有一个为零. 在 $b=0$ 时，原方程是变量分离的；$b\neq0$ 时，令 $z=ax+by$，$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{b}\left(\frac{dz}{dx}-a\right)$，原方程化为变量可分离的.

当 $\Delta=0$ 时，若 $b_1\neq0$，则 $\frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}=k$. 原方程化为 $\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{k(a_1x+b_1y)+c}{(a_1x+b_1y)+c_1}\right)$. 令 $z=a_1x+b_1y$，则 $y=\frac{1}{b_1}(z-a_1x)$，得方程

$$\frac{1}{b_1}\left(\frac{dz}{dx}-a_1\right)=f\left(\frac{kx+c}{z+c_1}\right)$$

是变量可分离的.

疑难解析

怎样理解齐次方程?

答 这里的齐次是指方程中 x,y 的次数相齐(相等)，与线性齐次方程中的意义不同，后者是等式一边为常数零.

齐次方程可以化为以下几种形式：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f\left(\frac{y}{x}\right),\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\varphi\left(\frac{x}{y}\right),\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f\left(\frac{ax+by}{a_1x+b_1y}\right),$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right).$$

求解齐次方程的关键在于怎样将方程化为上述形式，并运用主要内容中的方法求解.

方法、技巧与典型例题分析

例 1 解下列方程：

(1) $(x+2y)\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y=0$；　(2) $(y^2-2xy)\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y=0$；

(3) $(x^2+y^2)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2xy$；　(4) $xy'-y=x\tan\dfrac{y}{x}$；

(5) $xy'-y=(x+y)\ln\dfrac{x+y}{x}$；(6) $xy'=\sqrt{x^2-y^2}+y$.

解 先将所给微分方程化为齐次方程，再作变量代换.

(1) 将方程化为$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=1+2\dfrac{y}{x}$，令$u=\dfrac{y}{x}$，得

$$u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=1+2u \Rightarrow \frac{\mathrm{d}u}{1+u}=\frac{\mathrm{d}x}{x}\ (u\neq-1).$$

两端积分，得　$1+u=Cx \Rightarrow 1+\dfrac{y}{x}=Cx$，

即通解为　$y=Cx^2-x$.

$x=0$ 也是方程的解.

(2) 将方程化为$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2\dfrac{y}{x}-\left(\dfrac{y}{x}\right)^2$，令$u=\dfrac{y}{x}$，得

$$u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=2u-u^2\Rightarrow\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{u-1}\right)\mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}x}{x}\ (u\neq0,1).$$

两端积分，得　$\ln\left|\dfrac{u}{u-1}\right|=\ln|Cx| \Rightarrow u=\dfrac{Cx}{Cx-1}$，

即通解为　$y=\dfrac{Cx^2}{Cx-1}$.

由$u=0$和$u=1$，知$y=0$与$y=x$也是原方程的解.

(3) 将方程化为$\frac{dy}{dx}=\frac{2(y/x)}{1+(y/x)^2}$,令 $u=\frac{y}{x}$,得

$$u+x\frac{du}{dx}=\frac{2u}{1+u^2} \Rightarrow \frac{1+u^2}{u(1-u^2)}du=\frac{dx}{x} \quad (u\neq 0),$$

即
$$\frac{1-u^2+2u^2}{u(1-u^2)}du=\frac{dx}{x} \Rightarrow \left(\frac{1}{u}+\frac{2u}{1-u^2}\right)du=\frac{dx}{x}.$$

两端积分,得

$$\ln\frac{|u|}{|1-u^2|}=\ln C_1 x \Rightarrow \frac{|u|}{|1-u^2|}=C_1 x,$$

即通解为
$$x^2-y^2=Cy.$$

由 $u=0$,知 $y=0$ 也是原方程的解.

(4) 将方程化为$\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x}=\tan\frac{y}{x}$,令 $u=\frac{y}{x}$,得

$$u+x\frac{du}{dx}-u=\tan u \Rightarrow \cot u du=\frac{dx}{x} \quad (\sin u\neq 0).$$

两端积分,得
$$\sin u=Cx,$$

即通解为
$$\sin\frac{y}{x}=Cx.$$

$y=0$ 也是原方程的解.

(5) 将方程化为

$$\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x}=\left(1+\frac{y}{x}\right)\ln\left(1+\frac{y}{x}\right),$$

令 $u=\frac{y}{x}$,得

$$u+x\frac{du}{dx}-u=(1+u)\ln(1+u)$$

$$\Rightarrow \frac{du}{(1+u)\ln(1+u)}=\frac{dx}{x} \quad (1+u\neq 0, 1+u\neq 1).$$

两端积分,得
$$\ln(1+u)=Cx \Rightarrow u=e^{Cx}-1,$$

即通解为
$$y=x(e^{Cx}-1).$$

由 $1+u=0$ 和 $1+u=1$ 知,$y=0$,$y=-x$ 也是原方程的解.

(6) 将方程化为

$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}+\frac{y}{x},$$

令 $u=\frac{y}{x}$，得

$$u+x\frac{du}{dx}=\sqrt{1-u^2}+u \Rightarrow x\frac{du}{dx}=\sqrt{1-u^2}.$$

两端积分，得 $$\arcsin u=\ln|Cx|,$$

即通解为 $$\arcsin\frac{y}{x}=\ln|Cx|.$$

例 2 $(1+2e^{x/y})dx+2e^{x/y}\left(1-\frac{x}{y}\right)dy=0$，求通解.

解 将方程化为

$$\frac{dx}{dy}=\frac{2(x/y-1)e^{x/y}}{1+2e^{x/y}},$$

令 $u=\frac{x}{y}$，得

$$y\frac{du}{dy}=-\frac{u+2e^u}{1+2e^u}.$$

两端积分，得

$$\ln(u+2e^u)+\ln y=\ln C \Rightarrow y\left(\frac{x}{y}+2e^{x/y}\right)=C,$$

即通解为 $$x+2ye^{x/y}=C.$$

例 3 解下列方程：

(1) $(2x-4y+6)dx+(x+y-3)dy=0$；

(2) $(2x^2+3y^2-7)xdx-(3x^2+2y^2-8)ydy=0$；

(3) $(2x+y+1)dx-(4x+2y-3)dy=0$；

(4) $y'=2\left(\frac{y-2}{x+y-1}\right)^2$.

解 将方程改写为标准形式后，通过适当的坐标变换，将方程化为齐次方程，再求解.

(1) 将方程改写为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{4y-2x-6}{x+y-3}.$$

因为$\Delta=-6\neq0$,解

$$\begin{cases}4\beta-2\alpha=6,\\ \alpha+\beta=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=1,\\ \beta=2.\end{cases}$$

令$x=\xi+1,y=\eta+2$,代入原方程,得

$$\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\xi}=\frac{4\eta-2\xi}{\xi+\eta}.$$

令$u=\frac{\eta}{\xi}$,则得

$$u+\xi\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}=\frac{4u-2}{1+u}\Rightarrow\frac{(u+1)\mathrm{d}u}{(u-1)(u-2)}=-\frac{\mathrm{d}\xi}{\xi}\ (u\neq1,2).$$

两端积分,得 $$(u-2)\left(\frac{u-2}{u-1}\right)^2\xi=C,$$

即通解为 $$(y-2x)^3=C(y-x-1)^2.$$

由$u=1,u=2$知,$y=x+1,y=2x$也是原方程的解.

(2) 将方程改写为

$$\frac{2y\mathrm{d}y}{2x\mathrm{d}x}=\frac{2x^2+3y^2-7}{3x^2+2y^2-8},$$

令$x^2=u,y^2=v$,则得

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}=\frac{2u+3v-7}{3u+2v-8}.$$

因为$\Delta=-3\neq0$,解

$$\begin{cases}2\alpha+3\beta=7,\\ 3\alpha+2\beta=8\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=2,\\ \beta=1.\end{cases}$$

令$u=\xi+2,v=\eta+1$,代入原方程,得

$$\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\xi}=\frac{2\xi+3\eta}{3\xi+2\eta}.$$

令$w=\frac{\eta}{\xi}$,则得

$$\frac{3+2w}{2(1-w^2)}\mathrm{d}w=\frac{\mathrm{d}\xi}{\xi}\ (w\neq\pm1).$$

两端积分，得 $$\frac{1+w}{(1-w)^5}=C\xi^4,$$
即通解为 $$x^2+y^2-3=C(x^2-y^2-1)^5.$$

由 $w=\pm1$ 知，$y^2=x^2-1$，$y^2=-x^2+3$ 也是原方程的解.

（3）将方程改写为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{2x+y-1}{4x+2y-3},$$

因为 $\Delta=0$，$\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$，故令 $z=2x+y$，则得

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{5z-5}{2z-3}\Rightarrow\frac{2z-3}{z-1}\mathrm{d}z=5\mathrm{d}x\ (z\neq1).$$

两端积分，得 $$2z-\ln|z-1|=5x+C_1,$$
即通解为 $$2x+y-1=C\mathrm{e}^{2y-x}.$$

由 $z=1$ 知，$y=1-2x$ 也是原方程的解.

（4）令 $v=y+2$，$u=x-3$，则方程化为

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}=2\left(\frac{v}{u+v}\right)^2.$$

令 $z=\frac{v}{u}$，则有

$$z+u\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}u}=2\left(\frac{z}{1+z}\right)^2\Rightarrow\frac{(1+z)^2}{z(1+z^2)}\mathrm{d}z=-\frac{\mathrm{d}u}{u}\ (z\neq0).$$

两端积分，得 $$\ln|zu|=-2\arctan z+\ln|C|,$$
即通解为 $$y+2=C\mathrm{e}^{-2\arctan\frac{y+2}{x-3}}.$$

由 $z=0$ 知，$y=-2$ 也是原方程的解.

例4 求下列齐次方程满足初始条件的解：

（1）$(y^2-3x^2)\mathrm{d}y+2xy\mathrm{d}x=0$，$y(0)=1$；

（2）$(x^2+2xy-y^2)\mathrm{d}x+(y^2+2xy-x^2)\mathrm{d}y=0$，$y(1)=1$.

解 （1）将方程改写为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{2(y/x)}{(y/x)^2-3}.$$

令 $u=\frac{y}{x}$，得

$$u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=-\frac{2u}{u^2-3}\Rightarrow\frac{u^2-3}{u-u^3}\mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

两端积分，得 $$\ln\frac{u^2-1}{u^3}=\ln Cx,$$

即通解为 $$y^2-x^2=Cy^3.$$

代入 $y(0)=1$，解得 $C=1$. 故特解为

$$y^2-x^2=y^3.$$

（2）将方程改写为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{(y/x)^2-2(y/x)-1}{(y/x)^2+2(y/x)-1}.$$

令 $u=\dfrac{y}{x}$，得

$$\frac{\mathrm{d}x}{x}=\left(\frac{1}{u+1}-\frac{2u}{u^2+1}\right)\mathrm{d}u.$$

两端积分，得 $$u+1=Cx(u^2+1),$$

即通解为 $$x+y=C(x^2+y^2).$$

代入 $y(1)=1$，解得 $C=1$. 故特解为

$$x+y=x^2+y^2.$$

例 5 设 $\int_0^x\left[2y(t)+\sqrt{t^2+y^2(t)}\right]\mathrm{d}t=xy(t)$，且 $y(1)=0$，求 $y(x)$.

解 将积分式两端对 x 求导，得

$$2y+\sqrt{x^2+y^2}=xy'+y\Rightarrow\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y}{x}+\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}.$$

令 $u=\dfrac{y}{x}$，得 $$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{\sqrt{1+u^2}}{x},$$

分离变量后两端积分，得

$$\ln(u+\sqrt{1+u^2})=\ln Cx.$$

代入 $u(1)=y(1)=0$，解得 $C=1$，故

$$u+\sqrt{1+u^2}=x\Rightarrow y=\frac{1}{2}(x^2-1).$$

例 6 一船从河边点 A 驶向对岸码头点 O,设河宽 $OA=a$,水流速度为 $\boldsymbol{w}$,船行速度为 $\boldsymbol{v}$,如果船总是朝码头点 O 的方向前进,试求行船的路线,并证明船能到达对岸点 O 的充要条件为 $v>w$.

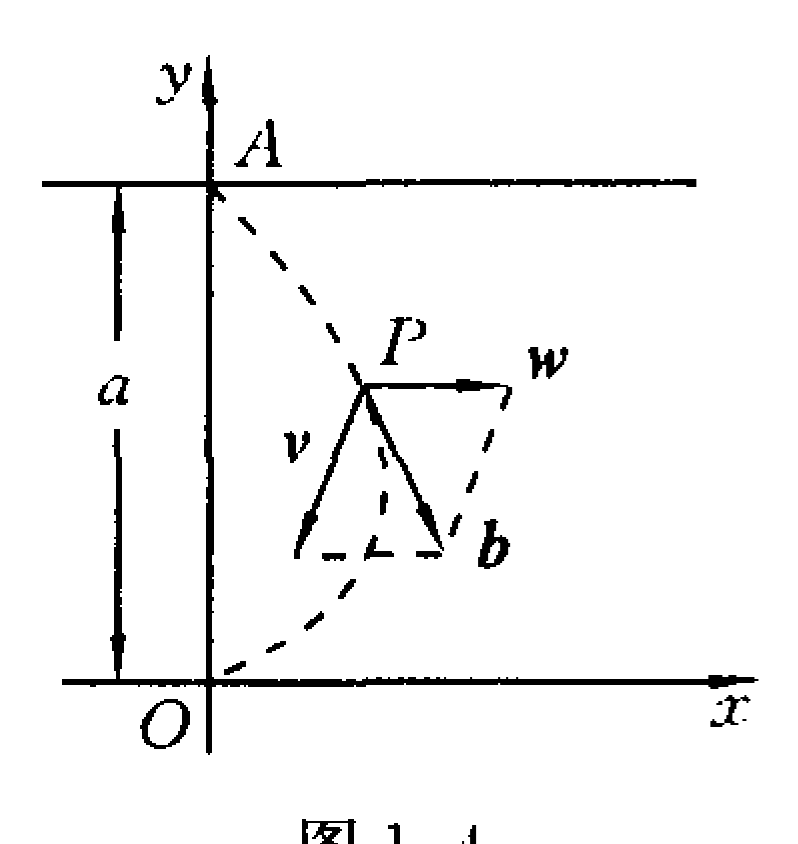


图 1.4

解 取坐标系如图 1.4 所示. 设时刻 t 船位于点 $P(x,y)$,则船的运动速度 $\boldsymbol{b}=(v_x,v_y)=\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)$,故 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{v_x}{v_y}$.

因为 $\boldsymbol{w}=(w,0)$, $\boldsymbol{v}=v\boldsymbol{e}_{\overrightarrow{PO}}$,其中 $\boldsymbol{e}_{\overrightarrow{PO}}$ 是与 $\overrightarrow{PO}$ 同方向的单位向量, $\boldsymbol{e}_{\overrightarrow{PO}}=-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(x,y)$,则 $v=-\frac{v}{\sqrt{x^2+y^2}}(x,y)$,故

$$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{w}+\boldsymbol{v}=\left(w-\frac{vx}{\sqrt{x^2+y^2}},-\frac{vy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right).$$

从而,建立微分方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{v_x}{v_y}=-\frac{w\sqrt{x^2+y^2}}{vy}+\frac{x}{y}=-\frac{w}{v}\sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^2+1}+\frac{x}{y}.$$

令 $u=\frac{x}{y}$,则 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=y\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}+u$,上面方程化为

$$y\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}=-\frac{w}{v}\sqrt{u^2+1}\Rightarrow\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2+1}}=-\frac{w}{vy}\mathrm{d}y.$$

两端积分,得 $\quad \operatorname{arsin\,h} u=-\frac{w}{v}(\ln y+\ln C)$,

即通解为

$$x=\frac{y}{2}\left[(Cy)^{-\frac{w}{v}}-(Cy)^{\frac{w}{v}}\right]=\frac{1}{2C}\left[(Cy)^{1-\frac{w}{v}}-(Cy)^{1+\frac{w}{v}}\right].$$

因为 $x(h)=0$,解得 $C=1/h$,故船行路线方程为

$$x=\frac{h}{2}\left[\left(\frac{y}{h}\right)^{1-\frac{w}{v}}-\left(\frac{y}{h}\right)^{1+\frac{w}{v}}\right],\quad 0\leqslant y\leqslant h.$$

当$v \leqslant w$时，x为负值，所以船能到达对岸点O的充要条件是$v > w$.

例7 设函数$f(x)$在$[1,+\infty)$上连续. 若由曲线$y=f(x)$、直线$x=1$、$x=t\ (t>1)$与x轴所围成的平面图形绕x轴旋转一周所成的旋转体体积为

$$V(t)=\frac{\pi}{3}[t^2 f(t)-f(1)],$$

求$y=f(x)$所满足的微分方程，并求满足初始条件$y(2)=\frac{2}{9}$的解.

解 依题意，有

$$V(t)=\pi\int_1^t f^2(x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{3}[t^2 f(t)-f(1)],$$

两端求导，得 $$3f^2(t)=2tf(t)+t^2 f'(t),$$

化为微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=3\left(\frac{y}{x}\right)^2-2\,\frac{y}{x}.$$

令$u=\frac{y}{x}$，得

$$x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=3u(u-1)\quad (u\neq 0,1).$$

分离变量后两端积分，得

$$\int\frac{\mathrm{d}u}{u(u-1)}=3\int\frac{\mathrm{d}x}{x}\Rightarrow y-x=Cx^3y.$$

由$y(2)=\frac{2}{9}$解得$C=-1$，故所求特解为

$$y=\frac{x}{1+x^3}.$$

例8 证明：若$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y)$是齐次微分方程，则微分方程必可写为$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=g\left(\frac{y}{x}\right)$，其中$g\left(\frac{y}{x}\right)$仅依赖于$\frac{y}{x}$.

证 因为对所有的t，均有$f(x,y)=f(tx,ty)$成立，所以，对

$t=\dfrac{1}{x}$也成立. 于是

$$f(x,y)=f(tx,ty)\xlongequal{t=1/x}f\left(1,\frac{y}{x}\right).$$

定义$g\left(\dfrac{y}{x}\right)=f\left(1,\dfrac{y}{x}\right)$,则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=g\left(\frac{y}{x}\right).$$

例 9 求下列齐次方程的通解:

(1) $\left(2x\sinh\dfrac{y}{x}+3y\cosh\dfrac{y}{x}\right)\mathrm{d}x-3x\cosh\dfrac{y}{x}\mathrm{d}y=0$;

(2) $x^2y'=3(x^2+y^2)\arctan\dfrac{y}{x}+xy$.

解 (1) 将方程变形为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{2\sinh(y/x)+3(y/x)\cosh(y/x)}{3\cosh(y/x)}.$$

令$u=\dfrac{y}{x}$,得

$$u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{2}{3}\tanh u+u \Rightarrow \frac{\mathrm{d}x}{x}=\frac{3}{2}\frac{\mathrm{e}^u+\mathrm{e}^{-u}}{\mathrm{e}^u-\mathrm{e}^{-u}}\mathrm{d}u.$$

两端积分,得

$$\ln C_1x=\ln(\mathrm{e}^u-\mathrm{e}^{-u})^{3/2}\Rightarrow Cx^2=(\mathrm{e}^u-\mathrm{e}^{-u})^3.$$

代回$u=\dfrac{y}{x}$,得

$$\sinh^3\frac{y}{x}=Cx^2.$$

(2) 将方程变形为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=3\left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right]\arctan\frac{y}{x}+\frac{y}{x}.$$

令$u=\dfrac{y}{x}$,得

$$u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=3(1+u^2)\arctan u+u \Rightarrow 3\frac{\mathrm{d}x}{x}=\frac{\mathrm{d}u}{(1+u^2)\arctan u}.$$

两端积分，得

$$\ln|\arctan u| = 3\ln|C_1 x|.$$

代回 $u=\frac{y}{x}$，得

$$\arctan\frac{y}{x} = Cx^3 \quad 或 \quad y = x\tan Cx^3.$$

例 10 设有连接点 $O(0,0)$ 与点 $A(1,1)$ 的一段向上凸的曲线弧 $\overset{\frown}{OA}$，对于 $\overset{\frown}{OA}$ 上任一点 $P(x,y)$，曲线弧 $\overset{\frown}{OP}$ 与直线段 $\overline{OA}$ 所围图形的面积为 x^2，求曲线弧 $\overset{\frown}{OA}$ 的方程.

解 设 $\overset{\frown}{OA}$ 的方程为 $y=f(x)$，依题意有

$$\int_0^x f(x)\mathrm{d}x - \frac{1}{2}xf(x) = x^2.$$

对方程两端求导，得

$$f(x) - \frac{1}{2}[f(x) + xf'(x)] = 2x \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y}{x} - 4.$$

令 $u=\frac{y}{x}$，得

$$x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = -4, \quad 即 \quad \mathrm{d}u = -4\frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

即得 $\qquad u = -4\ln x + C \Rightarrow y = -4x\ln x + Cx.$

由 $y|_{x=1}=1$ 得 $C=1$，故 $\overset{\frown}{OA}$ 弧方程为 $y=x(1-4\ln x)$.

第四节 一阶线性方程

主 要 内 容

1\. 形如 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p(x)y + q(x)$ 的方程称为**一阶线性方程**.

$\frac{dy}{dx}=p(x)y$ 称为**一阶线性齐次方程**，$y=0$ 是其一个解. 当 $y\neq 0$ 时，分离变量后，两端积分，得通解

$$y=Ce^{\int p(x)dx} \quad (C\neq 0).$$

满足初始条件 $y(x_0)=y_0$ 的特解为

$$y=y_0e^{\int_{x_0}^{x}p(x)dx}.$$

2. $\frac{dy}{dx}=p(x)y+q(x)$称为**一阶线性非齐次方程**. 用常数变易法，求得方程的通解为

$$y=e^{\int p(x)dx}\left[\int q(x)e^{-\int p(x)dx}dx+C\right].$$

满足初始条件 $y(x_0)=y_0$ 的特解为

$$y=e^{\int_{x_0}^{x}p(\tau)d\tau}\left[y_0+\int_{x_0}^{x}q(s)e^{-\int_{x_0}^{s}p(\tau)d\tau}ds\right].$$

3. 线性非齐次方程的通解等于它所对应的齐次方程的通解与非齐次方程的一个特解之和.

4. 形如$\frac{dy}{dx}=p(x)y+q(x)y^n(n\neq 0,1)$的方程，称为**贝努利(Bernoulli)方程**.

将等式两端除以 y^n，再令 $y^{1-n}=z$，得

$$\frac{dz}{dx}=(1-n)p(x)z+(1-n)q(x)$$

即为线性方程. 求解后，将 z 用 y 代回，即得原方程的解.

疑 难 解 析

1. 怎样理解常数变易法思想?

答 因为一阶线性齐次方程$\frac{dy}{dx}=p(x)y$ 的通解形式为 $y=Ce^{\int p(x)dx}$，所以，对一阶线性非齐次方程$\frac{dy}{dx}=p(x)y+q(x)$，自然会想到它们的通解之间的联系. 从形式上看，两个方程的区别仅在于

齐次方程中$q(x)=0$，而非齐次方程中$q(x)\neq 0$. 于是，将通解形式中常数C用函数$C(x)$替代. 经代入验证，$y=C(x)e^{\int p(x)dx}$确为非齐次方程的解，且$C(x)$也易于求得.

这种以未知函数$C(x)$代换常数C的方法，称为常数变易法. 在高阶线性方程和线性微分方程组中，这种方法同样适用.

2. 还有什么方法可求解一阶线性非齐次方程$\frac{dy}{dx}=p(x)y+q(x)$？

答 还可以用积分因子法.

对非齐次方程两端乘以函数$e^{-\int p(x)dx}$，得

$$y'e^{-\int p(x)dx}=p(x)ye^{-\int p(x)dx}+q(x)e^{-\int p(x)dx}.$$

化为

$$(ye^{-\int p(x)dx})'=q(x)e^{-\int p(x)dx}.$$

两端积分，整理即得通解

$$y=e^{\int p(x)dx}\left[\int q(x)e^{-\int p(x)dx}dx+C\right].$$

由于是通过对方程两端同乘以函数$\mu(x)=e^{-\int p(x)dx}$得到的，通常称函数$\mu(x)$为积分因子，所以这种方法称为积分因子法.

方法、技巧与典型例题分析

一阶线性非齐次方程可以用常数变易法求解，也可以将其化为标准形后，直接套用公式解出. 套用公式时，可直接代入公式，也可分别计算$e^{\int p(x)dx}$和$\int q(x)e^{-\int p(x)dx}dx$后，再代入公式.

例 1 解下列方程：

(1) $\frac{dy}{dx}+2xy=4x$；　　(2) $y'-\frac{1}{x-2}y=2(x-2)^2$；

(3) $\frac{di}{dt}-6i=10\sin 2t$；　　(4) $xy'-2y=2x^4$；

(5) $y'+y\tan x=\sec x$；　　(6) $xy'+(x+1)y=3x^2e^{-x}$.

解 （1）将方程化为标准形

$$\frac{dy}{dx}=-2xy+4x,$$

即 $$p(x)=-2x,\quad q(x)=4x,$$

于是 $$y=e^{\int p(x)dx}\left[\int q(x)e^{-\int p(x)dx}dx+C\right]=e^{-\int 2xdx}\left[\int 4xe^{\int 2xdx}dx+C\right]$$

$$=e^{-x^2}\left[\int 4xe^{x^2}dx+C\right]=e^{-x^2}\left[2\int e^{x^2}dx^2+C\right]=2+Ce^{-x^2}.$$

（2）将方程化为标准形

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x-2}y+2(x-2)^2,$$

即 $$p(x)=\frac{1}{x-2},\quad q(x)=2(x-2)^2,$$

于是 $$y=e^{\int\frac{1}{x-2}dx}\left[\int 2(x-2)^2e^{-\int\frac{1}{x-2}dx}dx+C\right]$$

$$=(x-2)\left[\int 2(x-2)^2\frac{1}{x-2}dx+C\right]$$

$$=(x-2)(x^2-4x+C).$$

（3）将方程化为标准形

$$\frac{di}{dt}=6i+10\sin 2t,$$

即 $$p(t)=6,\quad q(t)=10\sin 2t.$$

于是 $$i=e^{\int 6dt}\left[\int 10\sin 2te^{-\int 6dt}dt+C\right]$$

$$=e^{6t}\left[\int 10\sin 2te^{-6t}dt+C\right]$$

$$=-\frac{1}{2}(3\sin 2t+\cos 2t)+Ce^{6t}.$$

（4）将方程化为标准形

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2}{x}y+2x^3,$$

即 $$p(x)=\frac{2}{x},\quad q(x)=2x^3,$$

于是 $$y=e^{\int\frac{2}{x}dx}\left[\int 2x^3e^{-\int\frac{2}{x}dx}dx+C\right]=x^2\left[\int 2x^3\frac{1}{x^2}dx+C\right]$$

$$=x^4+Cx^2.$$

(5) 将方程化为标准形

$$\frac{dy}{dx}=-\tan x\cdot y+\sec x,$$

即 $$p(x)=-\tan x,\quad q(x)=\sec x,$$

于是 $$y=e^{-\int\tan x dx}\left[\int\sec x e^{\int\tan x dx}dx+C\right]$$

$$=\cos x\left[\int\sec x\frac{1}{\cos x}dx+C\right]=\sin x+C\cos x.$$

(6) 将方程化为标准形

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1+x}{x}y+3xe^{-x},$$

即 $$p(x)=-\frac{1+x}{x},\quad q(x)=3xe^{-x},$$

于是 $$y=e^{-\int\frac{1+x}{x}dx}\left[\int 3xe^{-x}\cdot e^{\int\frac{1+x}{x}dx}dx+C\right]$$

$$=\frac{1}{x}e^{-x}\left[\int 3xe^{-x}(xe^x)dx+C\right]=\frac{1}{x}e^{-x}(x^3+C).$$

例 2 求下列方程满足初始条件的解:

(1) $\frac{dy}{dx}-\frac{ny}{x}=e^x x^n, y(1)=2e$;

(2) $(1+x^2)\frac{dy}{dx}+2xy=x^2, y(1)=2.$

解 (1) 将方程化为$\frac{dy}{dx}=\frac{n}{x}y+e^x x^n$,所以

$$y=e^{\int\frac{n}{x}dx}\left[\int e^x x^n e^{-\int\frac{n}{x}dx}dx+C\right]=x^n\left[\int e^x dx+C\right]=x^n(e^x+C).$$

代入 $y(1)=2e$,解得 $C=e$,故所求特解为

$$y=x^n(e^x+e).$$

(2) 将方程化为$\frac{dy}{dx}=-\frac{2x}{1+x^2}y+x^2$,所以

$$y=e^{-\int\frac{2x}{1+x^2}dx}\left[\int x^2 e^{\int\frac{2x}{1+x^2}dx}dx+C\right]=\frac{x^3}{3(1+x^2)}+\frac{C}{1+x^2}.$$

代入 $y(1)=2$,解得 $C=11/3$,故所求特解为

$$y=\frac{1}{3(1+x^2)}(11+x^3).$$

例 3 求一曲线,使其切线在纵轴上的截距等于切点的横坐标.

解 设曲线方程为 $y=y(x)$,过曲线上任一点 $P(x,y)$ 的切线方程为

$$Y-y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(X-x),$$

则在 y 轴上截距为 $y-x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$,由题意得

$$y-x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y}{x}-1.$$

于是,所求通解为

$$y=\mathrm{e}^{\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\left[\int -1\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]=Cx-x\ln|x|.$$

例 4 求下列微分方程的通解:

(1) $y\ln y\mathrm{d}x+(x-\ln y)\mathrm{d}y=0$;　　(2) $(y^2-6x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2y=0$;

(3) $y'=\frac{y}{2y\ln y+y-x}$.

解 当直接求解遇到困难时,可考虑改变 x 与 y 的地位,可能易于解出.

(1) 将方程化为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=-\frac{1}{y\ln y}x+\frac{1}{y}.$$

于是,通解为

$$x=\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{y\ln y}\mathrm{d}y}\left[\int\frac{1}{y}\mathrm{e}^{\int\frac{1}{y\ln y}\mathrm{d}y}\mathrm{d}y+C_1\right]=\frac{1}{\ln y}\left[\int\frac{1}{y}\ln y\mathrm{d}y+C_1\right]$$
$$=\frac{1}{\ln y}\left(\frac{1}{2}\ln^2 y+C_1\right)$$

或

$$2x\ln y=\ln^2 y+C.$$

(2) 将方程化为 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{3}{y}x-\frac{y}{2}$. 于是,通解为

$$x=\mathrm{e}^{\int\frac{3}{y}\mathrm{d}y}\left[-\int\frac{y}{2}\mathrm{e}^{-\int\frac{3}{y}\mathrm{d}y}\mathrm{d}y+C\right]=y^3\left[-\int\frac{y}{2}\cdot\frac{1}{y^3}\mathrm{d}y+C\right]$$
$$=\frac{1}{2}y^2+Cy^3.$$

(3) 将方程化为$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=-\frac{x}{y}+(1+2\ln y)$. 于是,通解为

$$x=\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{y}\mathrm{d}y}\left[\int(1+2\ln y)\mathrm{e}^{\int\frac{1}{y}\mathrm{d}y}\mathrm{d}y+C\right]=\frac{1}{y}[y^2\ln y+C]$$
$$=y\ln y+\frac{C}{y}.$$

例 5 设函数 $p(x)$,$f(x)$在$[0,+\infty)$上连续,且$\lim\limits_{x\to+\infty}p(x)=a>0$,$|f(x)|\leqslant b$ (a,b 为常数). 求证:方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+p(x)y=f(x)$的一切解在$[0,+\infty)$上有界.

证 因为$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-p(x)y+f(x)$,所以方程通解为

$$y=\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\left[\int_0^x f(t)\mathrm{e}^{\int p(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}t+C\right].$$

由于$\lim\limits_{x\to+\infty}p(x)=a>0$,所以$|\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}|\leqslant N$.

若取C为任意常数,则由于$x\in[0,+\infty)$,而$|f(x)|\leqslant b$,故

$$|y(x)|=\left|\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\cdot\int_0^x f(t)\mathrm{e}^{\int p(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}t\right|\leqslant|bN|$$

也有界. 从而,方程的一切解在$[0,+\infty)$上有界.

例6 设$f(x)$在$[0,+\infty)$上连续,且$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=b$,又$a>0$. 求证:方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+ay=f(x)$的一切解 $y(x)$,均有$\lim\limits_{x\to+\infty}y(x)=\frac{b}{a}$.

证 因为方程的通解为

$$y=\mathrm{e}^{-ax}\left[\int_0^x f(t)\mathrm{e}^{at}\mathrm{d}t+C\right],$$

利用洛必达(L'Hospital)法则,可得

$$\lim_{x\to+\infty}y(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x f(t)\mathrm{e}^{at}\mathrm{d}t+C}{\mathrm{e}^{ax}}\xlongequal{\mathrm{L}'}\lim\frac{f(x)\mathrm{e}^{ax}}{a\mathrm{e}^{ax}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{a}=\frac{b}{a}.$$

例 7 设 $y(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续可微，且有

$$\lim_{x\to+\infty}[y'(x)+y(x)]=0,$$

试证：$\lim\limits_{x\to+\infty}y(x)=0$.

证 令 $y'(x)+y(x)=f(x)$，则由题意知，$f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$. 令 $a=1$，则由例 6 结果知

$$\lim_{x\to+\infty}y(x)=\frac{b}{1}=b=0.$$

例 8 设曲线积分 $\int_L yf(x)\mathrm{d}x+[2xf(x)-x^2]\mathrm{d}y$ 在右半平面 $(x>0)$ 内与路径无关，其中 $f(x)$ 可导，且 $f(1)=1$，求 $f(x)$.

解 由曲线积分与路径无关条件，得

$$\frac{\partial}{\partial y}[yf(x)]=\frac{\partial}{\partial x}[2xf(x)-x^2],$$

即
$$f'(x)=-\frac{1}{2x}f(x)+1.$$

通解为
$$f(x)=\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{2x}\mathrm{d}x}\left[\int\mathrm{e}^{\int\frac{1}{2x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]=\frac{2}{3}x+Cx^{-1/2}.$$

代入 $f(1)=1$，解得 $C=1/3$，故

$$f(x)=\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}x^{-1/2}.$$

例 9 求下列贝努利方程的通解：

(1) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y=y^2(\cos x-\sin x)$；

(2) $x\mathrm{d}y-[y+xy^3(1+\ln x)]\mathrm{d}x=0$.

解 由具体方程确定代换 z，化为一阶线性方程后求解.

(1) 令 $z=y^{1-2}=1/y$，化方程为

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=z+(\sin x-\cos x),$$

则
$$z=\mathrm{e}^{\int\mathrm{d}x}\left[\int(\sin x-\cos x)\mathrm{e}^{-\int\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]$$

$$=e^x[-\sin x e^{-x}+C]=Ce^x-\sin x,$$

即通解为 $$1/y=Ce^x-\sin x.$$

$y=0$ 也是原方程的解.

(2) 将方程改写为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y}{x}+(1+\ln x)y^3,$$

令 $z=y^{1-3}=y^{-2}$,化方程为

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-\frac{2}{x}z-2(1+\ln x),$$

则 $$z=e^{-\int\frac{2}{x}\mathrm{d}x}\left[-\int 2(1+\ln x)e^{\int\frac{2}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]$$

$$=\frac{C}{x^2}-\frac{2}{3}x\ln x-\frac{4}{9}x,$$

即通解 $$\left(\frac{x}{y}\right)^2=C-\frac{4}{9}x^3-\frac{2}{3}x^3\ln x.$$

$y=0$ 也是原方程的解.

例 10 设对于半空间 $x>0$ 内的任意光滑有向封闭曲面 S,都有

$$\oiint_S xf(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-xyf(x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x-e^{2x}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0,$$

其中 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有连续的一阶导数,且 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=1$,求 $f(x)$.

解 由高斯(Gauss)公式,得

$$0=\oiint_S xf(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-xyf(x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x-e^{2x}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\pm\iiint_V(xf'(x)+f(x)-xf(x)-e^{2x})\mathrm{d}V,$$

其中 V 是 S 所围成的有界闭区域. 从而,由 S 的任意性知

$$xf'(x)+(1-x)f(x)-e^{2x}=0,\quad x>0,$$

即得微分方程

$$f'(x)=\left(1-\frac{1}{x}\right)f(x)+\frac{1}{x}e^{2x} \quad (x>0).$$

通解为 $$f(x)=e^{\int\left(1-\frac{1}{x}\right)dx}\left[\int\frac{1}{x}e^{2x}e^{-\int\left(1-\frac{1}{x}\right)dx}dx+C\right]$$
$$=\frac{1}{x}e^{x}(e^{x}+C).$$

由于 $$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{e^{2x}+Ce^{x}}{x}\right)=1,$$

故 $$\lim_{x\to0^+}(e^{2x}+Ce^{x})=0 \Rightarrow C=-1,$$

从而 $$f(x)=\frac{1}{x}e^{x}(e^{x}-1).$$

例 11 设有微分方程 $y'-2y=\varphi(x)$，其中

$$\varphi(x)=\begin{cases}2, & x<1,\\ 0, & x>1.\end{cases}$$

试求在 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续函数 $y=y(x)$，使之在 $(-\infty,1)$ 和 $(1,+\infty)$ 内部满足所给方程，且满足 $y(0)=0$.

解 当 $x<1$ 时，方程化为 $y'-2y=2$，通解为

$$y=e^{\int 2dx}\left[\int 2e^{-\int 2dx}dx+C_1\right]=C_1e^{2x}-1, \quad x<1.$$

代入 $y(0)=0$，解得 $C_1=1$，故特解为 $y=e^{2x}-1$.

当 $x>1$ 时，方程化为 $y'-2y=0$，通解为

$$y=C_2e^{\int 2dx}=C_2e^{2x}, \quad x>1.$$

由 $\lim\limits_{x\to1^+}C_2e^{2x}=\lim\limits_{x\to1^-}(e^{2x}-1)$，得 $C_2=1-e^{-2}$，故解为

$$y=(1-e^{-2})e^{2x}, \quad x>1.$$

若补充定义 $y(1)=e^2-1$，则满足条件的函数

$$y(x)=\begin{cases}e^{2x}-1, & x<1,\\ e^2-1, & x=1,\\ (1-e^{-2})e^{2x}, & x>1.\end{cases}$$

形如 $\frac{dy}{dx}=p(x)y^2+q(x)y+f(x)$ 的方程，称为**黎卡提**

(Riccati)**方程**. 在已知黎卡提方程一个解的情形，经过适当地变换 $z=y-y_1(x)$（$y_1(x)$是方程的一个已知解），可以化为贝努利方程求解.

例12 已知黎卡提方程$\frac{dy}{dx}=y^2-\frac{2}{x^2}$的一个解为$y_1(x)=\frac{1}{x}$，求方程的通解.

解 作代换 $z=y-\frac{1}{x}$或$y=z+\frac{1}{x}$，则$\frac{dy}{dx}=\frac{dz}{dx}-\frac{1}{x^2}$，代入原方程，得

$$\frac{dz}{dx}-\frac{1}{x^2}=\left(z+\frac{1}{x}\right)^2-\frac{1}{x^2}\Rightarrow\frac{dz}{dx}=\frac{2}{x}z+z^2.$$

通解为
$$z\left(\frac{C}{x^2}-\frac{1}{3}x\right)=1,$$

即
$$\left(y-\frac{1}{x}\right)\left(\frac{C}{x^2}-\frac{x}{3}\right)=1.$$

例13 求解 $y'=\frac{f'(x)}{g(x)}y^2-\frac{g'(x)}{f(x)}$.

解 求解方程是黎卡提方程，可以观察出 $y_1=-\frac{g(x)}{f(x)}$是方程的一个解.

作变换 $y=z-\frac{g(x)}{f(x)}$，代入原方程，得

$$\frac{dz}{dx}=\frac{f'(x)}{g(x)}z^2-2\frac{f'(x)}{f(x)}z.$$

化为贝努利方程，再作变换$u=z^{-1}$，代入方程得

$$\frac{du}{dx}=2\frac{f'(x)}{f(x)}u-\frac{f'(x)}{g(x)}.$$

解此一阶线性方程，得通解为

$$u=e^{\int\frac{2f'(x)}{f(x)}dx}\left[C-\int\frac{f'(x)}{g(x)}\cdot\frac{1}{[f(x)]^2}dx\right],$$

即
$$u=[f(x)]^2\left[C-\int\frac{f'(x)}{g(x)f^2(x)}dx\right].$$

代回原变量，得原方程解为

$$y=z-\frac{g(x)}{f(x)},$$

即
$$y=-\frac{g(x)}{f(x)}+\frac{1}{f^2(x)}\left[C-\int\frac{f'(x)}{g(x)f^2(x)}\mathrm{d}x\right]^{-1}.$$

由例12 与例13 可以看出，黎卡提方程的求解必须按前述过程进行. 关键是观察出一个解.

第五节　全微分方程及积分因子

主 要 内 容

1. 若微分方程 $M(x,y)\mathrm{d}x+N(x,y)\mathrm{d}y=0$ 的左端恰为某二元函数 $U(x,y)$ 的全微分，则称方程为**全微分方程**或**恰当方程**. $U(x,y)$ 称为方程的**原函数**.

定理 1.1　假如 $U(x,y)$ 是

$$\mathrm{d}U(x,y)=M(x,y)\mathrm{d}x+N(x,y)\mathrm{d}y$$

的一个原函数，则全微分方程

$$M(x,y)\mathrm{d}x+N(x,y)\mathrm{d}y=0$$

的通积分为

$$U(x,y)=C\quad(C\text{ 为任意常数}).$$

2. 假如 $M(x,y)$ 与 $N(x,y)$ 在矩形域

$$R:|x-x_0|\leqslant a,\quad |y-y_0|\leqslant b$$

上连续可微，则 $M(x,y)\mathrm{d}x+N(x,y)\mathrm{d}y$ 在 R 上是全微分的充分必要条件是：在 R 上有

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}.$$

3. 若 $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$，则全微分方程 $M(x,y)\mathrm{d}x+N(x,y)\mathrm{d}y=0$ 的通积分为

$$\int_{x_0}^{x} M(x,y_0)\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y} N(x,y)\mathrm{d}y=C$$

或
$$\int_{x_0}^{x} M(x,y)\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y} N(x_0,y)\mathrm{d}y=C.$$

满足初始条件 $y(x_0)=y_0$ 的特解为

$$\int_{x_0}^{x} M(x,y_0)\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y} N(x,y)\mathrm{d}y=0$$

或
$$\int_{x_0}^{x} M(x,y)\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y} N(x_0,y)\mathrm{d}y=0.$$

4. 当 $M(x,y)\mathrm{d}x+N(x,y)\mathrm{d}y=0$ 不是全微分方程时，在一定条件下，可以化为全微分方程.

若存在连续可微函数 $\mu(x,y)\neq 0$，使方程

$$\mu(x,y)M(x,y)\mathrm{d}x+\mu(x,y)N(x,y)\mathrm{d}y=0$$

成为全微分方程，称 $\mu(x,y)$ 为方程的一个积分因子.

5. 当 $\left(\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}\right)\Big/N=\varphi(x)$（即与 y 无关）时，则

$$\mu(x,y)=\mu(x)=\mathrm{e}^{\int\varphi(x)\mathrm{d}x}$$

是方程的一个积分因子.

当 $\left(\dfrac{\partial N}{\partial x}-\dfrac{\partial M}{\partial y}\right)\Big/M=f(y)$（即与 x 无关）时，则

$$\mu(x,y)=\mu(y)=\mathrm{e}^{\int f(y)\mathrm{d}y}$$

是方程的一个积分因子.

积分因子还可以根据具体方程，利用数学分析中的全微分公式凑出.

疑 难 解 析

1. 求解全微分方程常用哪些方法？要注意哪些问题？

答 常用曲线积分法、偏积分法与凑微分法. 设 $M(x,y)\mathrm{d}x+N(x,y)\mathrm{d}y=0$，则

(1) 曲线积分法. 利用公式

$$U(x,y)=\int_{x_0}^{x} M(x,y)\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y} N(x_0,y)\mathrm{d}y,$$

$$U(x,y)=\int_{x_0}^{x} M(x,y_0)\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y} N(x,y)\mathrm{d}y$$

求出. (x_0,y_0)一般可取$(0,0)$,当$(0,0)$不在R内时可另外适当选取.

(2) 偏积分法. 因为$\frac{\partial U}{\partial x}=M(x,y)$,$\frac{\partial U}{\partial y}=N(x,y)$,故

$$U(x,y)=\int_{x_0}^{x} M(x,y)\mathrm{d}x+g(y).$$

又由
$$U_y(x,y)=\int_{x_0}^{x} M(x,y)\mathrm{d}x+g'(y)=N(x,y)$$

可求得$g'(y)$,从而得出$g(y)$,代回即得$U(x,y)$.

(3) 凑微分法. 先将方程中已构成全微分的项分离出来,再将余下的项凑成全微分. 如

$$(x^4\mathrm{e}^x-2mxy^2)\mathrm{d}x+2mx^2y\mathrm{d}y=0$$

是全微分方程,重组后得

$$\mathrm{e}^x\mathrm{d}x+m\,\frac{-2xy^2\mathrm{d}x+2x^2y\mathrm{d}y}{x^4}=0,$$

即
$$\mathrm{d}\mathrm{e}^x+m\mathrm{d}\left(\frac{y^2}{x^2}\right)=0\Rightarrow \mathrm{d}\left(\mathrm{e}^x+m\,\frac{y^2}{x^2}\right)=0,$$

所以
$$U(x,y)=\mathrm{e}^x+m\,\frac{y^2}{x^2}=C.$$

为此,需要熟记与运用一些全微分公式.

2. 怎样求积分因子?

答 (1) 若$\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\Big/N=\varphi(x)$,则积分因子为$\mu(x)=\mathrm{e}^{\int\varphi(x)\mathrm{d}x}$.

如对于微分方程

$$(x^4\mathrm{e}^x-2xy^2)\mathrm{d}x+2x^2y\mathrm{d}y=0,$$

取
$$\mu=\mathrm{e}^{\int\varphi(x)\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^{-\int\frac{4}{x}\mathrm{d}x}=x^{-4},$$

故得全微分方程

$$\left(\mathrm{e}^x-\frac{2y^2}{x^3}\right)\mathrm{d}x+\frac{2y}{x^2}\mathrm{d}y=0.$$

通解为 $$U(x,y)=\mathrm{e}^x+y^2/x^2=C.$$

（2）若$\left(\dfrac{\partial N}{\partial x}-\dfrac{\partial M}{\partial y}\right)\Big/M=f(y)$，则积分因子为$\mu(y)=\mathrm{e}^{\int f(y)\mathrm{d}y}$.

如对于微分方程

$$(\ln y+2x-1)\mathrm{d}y-2y\mathrm{d}x=0,$$

取 $$\mu=\mathrm{e}^{\int f(y)\mathrm{d}y}=\mathrm{e}^{-\int\frac{2}{y}\mathrm{d}y}=y^{-2},$$

则得全微分方程

$$\frac{2}{y}\mathrm{d}x-\left(\frac{\ln y}{y^2}+\frac{2x}{y^2}-\frac{1}{y^2}\right)\mathrm{d}y=0.$$

通解为 $$2x+\ln y=Cy.$$

（3）用全微分公式观察法．利用全微分公式

$$\mathrm{d}(uv)=u\mathrm{d}v+v\mathrm{d}u,\quad \mathrm{d}(u\pm v)=\mathrm{d}u\pm\mathrm{d}v,$$

$$\mathrm{d}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\mathrm{d}u-u\mathrm{d}v}{v^2},\quad \frac{1}{2}\mathrm{d}(u^2+v^2)=u\mathrm{d}u+v\mathrm{d}v,$$

$$\mathrm{d}\left(\arctan\frac{u}{v}\right)=\frac{v\mathrm{d}u-u\mathrm{d}v}{u^2+v^2},\quad \mathrm{d}\left(\ln\frac{u}{v}\right)=\frac{v\mathrm{d}u-u\mathrm{d}v}{uv},$$

$$\mathrm{d}\sqrt{u^2+v^2}=\frac{u\mathrm{d}u+v\mathrm{d}v}{\sqrt{u^2+v^2}},\quad \mathrm{d}(u^v)=vu^{v-1}\mathrm{d}u+u^v\ln u\mathrm{d}v,\cdots$$

求出$\mu(x,y)$.

例如微分方程$y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y=0$，可利用$\mathrm{d}\left(\dfrac{u}{v}\right)=\dfrac{v\mathrm{d}u-u\mathrm{d}v}{v^2}$式，取$\mu=\dfrac{1}{y^2}$，化方程为$\mathrm{d}\dfrac{x}{y}=0$.

又如微分方程$xy'=y+\sqrt{x^2+y^2}$，可化为$x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x$，取$\mu=\dfrac{1}{x^2}$，得

$$\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x^2}\mathrm{d}x,$$

即化为 $\mathrm{d}\,\dfrac{y}{x}=\dfrac{1}{x}\sqrt{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}\mathrm{d}x \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}(y/x)}{\sqrt{1+(y/x)^2}}=\dfrac{\mathrm{d}x}{x}.$

通解为 $$x^2=C^2x^4-2Cx^2y.$$

方法、技巧与典型例题分析

求解全微分方程可采用疑难解析1中指出的任一种方法，通过多练习，就能找到最简捷的方法.

例1 解下列方程：

(1) $2xy\mathrm{d}x+(x^2-y^2)\mathrm{d}y=0$；

(2) $\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}x-(2y+x\mathrm{e}^{-y})\mathrm{d}y=0$；

(3) $2x(1+\sqrt{x^2-y})\mathrm{d}x-\sqrt{x^2-y}\mathrm{d}y=0$；

(4) $\dfrac{y}{x}\mathrm{d}x+(y^3+\ln x)\mathrm{d}y=0$；

(5) $\dfrac{3x^2+y^2}{y^2}\mathrm{d}x-\dfrac{2x^3+5y}{y^3}\mathrm{d}y=0$；

(6) $(1+y^2\sin 2x)\mathrm{d}x-y\cos 2x\mathrm{d}y=0$.

解 先验证所给方程是否是全微分方程，再选用适当方法求出通解.

(1) $\dfrac{\partial M}{\partial y}=2x=\dfrac{\partial N}{\partial x}$，方程是全微分方程，取$(x_0,y_0)$为$(0,0)$，用曲线积分求得

$$U(x,y)=\int_0^x 0\mathrm{d}x+\int_0^y (x^2-y^2)\mathrm{d}y=x^2y-\frac{y^3}{3}.$$

故通解为 $$x^2y-\frac{y^3}{3}=C.$$

(2) $\dfrac{\partial M}{\partial y}=-\mathrm{e}^{-y}=\dfrac{\partial N}{\partial x}$，方程是全微分方程，取$(x_0,y_0)$为$(0,0)$，用曲线积分求得

$$U(x,y)=\int_0^x \mathrm{d}x+\int_0^y -(2y+x\mathrm{e}^{-y})\mathrm{d}y=x-y^2+x\mathrm{e}^{-y}-x.$$

故通解为 $$xe^{-y}-y^2=C.$$

(3) $\dfrac{\partial M}{\partial y}=-\dfrac{x}{\sqrt{x^2-y}}=\dfrac{\partial N}{\partial x}$，方程是全微分方程. 用凑微分法对方程重组，得

$$2x\mathrm{d}x+(2x\sqrt{x^2-y}\mathrm{d}x-\sqrt{x^2-y}\mathrm{d}y)=0$$

$$\Rightarrow \mathrm{d}x^2+\mathrm{d}\left[\frac{2}{3}(x^2-y)^{3/2}\right]=0.$$

故通解为 $$x^2+\frac{2}{3}(x^2-y)^{3/2}=C.$$

(4) $\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{1}{x}=\dfrac{\partial N}{\partial x}$，方程是全微分方程. 用凑微分法对方程重组，得

$$\left(\frac{y}{x}\mathrm{d}x+\ln x\mathrm{d}y\right)+y^3\mathrm{d}y=0\Rightarrow \mathrm{d}(y\ln x)+\mathrm{d}\,\frac{y^4}{4}=0.$$

故通解为 $$y\ln x+\frac{y^4}{4}=C.$$

(5) $\dfrac{\partial M}{\partial y}=-\dfrac{6x^2}{y^3}=\dfrac{\partial N}{\partial x}$，方程是全微分方程. 用凑微分法对方程重组，得

$$\mathrm{d}x+\left(\frac{3x^2}{y^2}\mathrm{d}x-\frac{2x^3}{y^3}\mathrm{d}y\right)-\frac{5}{y^2}\mathrm{d}y\Rightarrow \mathrm{d}x+\mathrm{d}\left(\frac{x^3}{y^2}\right)-\mathrm{d}\left(\frac{5}{y}\right)=0.$$

故通解为 $$x+\frac{x^3}{y^2}+\frac{5}{y}=C.$$

(6) $\dfrac{\partial M}{\partial y}=2y\sin x=\dfrac{\partial N}{\partial x}$，方程是全微分方程. 用凑微分法重组，得

$$\mathrm{d}x+(y^2\sin 2x\mathrm{d}x-y\cos 2x\mathrm{d}y)=0\Rightarrow \mathrm{d}x+\mathrm{d}\left(-\frac{y^2}{2}\cos 2x\right)=0.$$

故通解为 $$x-\frac{y^2}{2}\cos 2x=C.$$

例2 确定 a 的值，使

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{ax+1}{y^3}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$$

为全微分方程，并求出通解.

解 将方程化为标准形

$$\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)dx+\frac{ax+1}{y^3}dy=0,$$

由全微分方程的充要条件$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$，得

$$-\frac{2}{y^3}=\frac{a}{y^3}\Rightarrow a=-2.$$

用偏积分法，有

$$U(x,y)=\int\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)dx+g(y)=-\frac{1}{x}+\frac{x}{y^2}+g(y),$$

又 $$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{2x}{y^3}+g'(y)=\frac{1-2x}{y^3}\Rightarrow g'(y)=\frac{1}{y^3},$$

故$g(y)=-\frac{1}{2y^3}$. 于是，方程通解为

$$-\frac{1}{x}+\frac{x}{y^2}-\frac{1}{2y^2}=C.$$

例3 求下列方程的积分因子和通解：

(1) $2xydx+(y^2-3x^2)dy=0$；

(2) $(2xy^4e^y+2xy^3+y)dx+(x^2y^4e^y-x^2y^2-3x)dy=0$；

(3) $(\ln y+2x-1)\frac{dy}{dx}=2y$.

解 (1) $\frac{\partial M}{\partial y}=2x,\frac{\partial N}{\partial x}=-6x$，得

$$\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)\Big/M=\frac{-6x-2x}{2xy}=-\frac{4}{y}.$$

故有 $$\mu(y)=e^{-4\int\frac{1}{y}dy}=\frac{1}{y^4}.$$

用$\mu(y)$乘原方程两端，得全微分方程

$$\frac{2x}{y^3}dx+\left(\frac{1}{y^2}-\frac{3x^2}{y^4}\right)dy=0.$$

用凑微分法，得 $$d\,\frac{x^2}{y^3}-d\,\frac{1}{y}=0,$$

故通解为 $$x^2-y^2=Cy^3.$$

(2) $\frac{\partial M}{\partial y}=8xy^3e^y+2xy^4e^y+6xy^2+1,\frac{\partial N}{\partial x}=2xy^4e^y-2xy^2-3,$

得
$$\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)\Big/M=-\frac{4}{y},$$

故有 $$\mu(y)=e^{-4\int\frac{1}{y}dy}=-\frac{1}{y^4}.$$

用 $\mu(y)$ 乘原方程两端，得全微分方程
$$\left(2xe^y+\frac{2x}{y}+\frac{1}{y^3}\right)dx+\left(x^2e^y-\frac{x^2}{y^2}-\frac{3x}{y^4}\right)dy=0.$$

用凑微分法重组，得
$$(2xe^ydx+x^2e^ydy)+\left(\frac{2x}{y}dx-\frac{x^2}{y^2}dy\right)+\left(\frac{1}{y^3}dx-\frac{3x}{y^4}dy\right)=0,$$

即 $$d\left(x^2e^y+\frac{x^2}{y}+\frac{x}{y^3}\right)=0,$$

故通解为 $$x^2e^y+\frac{x^2}{y}+\frac{x}{y^3}=C.$$

$y=0$ 也是原方程的解.

(3) 方程化为 $2ydx-(\ln y+2x-1)dy=0,\frac{\partial M}{\partial y}=2,\frac{\partial N}{\partial x}=-2,$

得
$$\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)\Big/M=-\frac{4}{2y}=-\frac{2}{y},$$

故有 $$\mu(y)=e^{-\int\frac{2}{y}dy}=\frac{1}{y^2}.$$

用 $\mu(y)=\frac{1}{y^2}$ 乘方程两端，得全微分方程
$$\frac{2}{y}dx-\left(\frac{\ln y}{y^2}+\frac{2x}{y^2}-\frac{1}{y^2}\right)dy=0.$$

用凑微分法重组，得
$$\left(\frac{2}{y}dx-\frac{2x}{y^2}dy\right)+\left(\frac{1}{y^2}-\frac{\ln y}{y^2}\right)dy=0,$$

即 $$\mathrm{d}\,\frac{2x}{y}+\mathrm{d}\,\frac{\ln y}{y}=0.$$

故通解为 $$2x+\ln y=Cy.$$

例 4 求下列方程的积分因子与通解：

(1) $(x^2+y^2+x)\mathrm{d}x+xy\mathrm{d}y=0$；

(2) $(x^4+y^4)\mathrm{d}x-xy^3\mathrm{d}y=0$；

(3) $(2x^3y^2+4x^2y+2xy^2+xy^4+2y)\mathrm{d}x+2(y^3+x^2y+x)\mathrm{d}y=0$.

解 (1) $\frac{\partial M}{\partial y}=2y,\frac{\partial N}{\partial x}=y$，得

$$\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\Big/N=\frac{2y-y}{xy}=\frac{1}{x},$$

故有 $$\mu(x)=\mathrm{e}^{\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}=x.$$

用 $\mu(x)=x$ 乘原方程两端，得全微分方程

$$(x^3+xy^2+x^2)\mathrm{d}x+x^2y\mathrm{d}y=0.$$

用凑微分法重组，得

$$(xy^2\mathrm{d}x+x^2y\mathrm{d}y)+(x^3+x^2)\mathrm{d}x=0,$$

即 $$\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}x^2y^2\right)+\mathrm{d}\left(\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}\right)=0.$$

故通解为 $$6x^2y^2+3x^4+4x^3=C.$$

(2) $\frac{\partial M}{\partial y}=4y^3,\frac{\partial N}{\partial x}=-y^3$，得

$$\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\Big/N=\frac{4y^3+y^3}{-xy^3}=-\frac{5}{x}.$$

故有 $$\mu(x)=\mathrm{e}^{-\int\frac{5}{x}\mathrm{d}x}=\frac{1}{x^5}.$$

用 $\mu(x)=1/x^5$ 乘原方程两端，得全微分方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{x}+\frac{y^4}{x^5}\mathrm{d}x-\frac{y^3}{x^4}\mathrm{d}y=0,$$

即 $$\mathrm{d}(\ln|x|)-\mathrm{d}\left(\frac{y^4}{4x^4}\right)=0,$$

故通解为 $$\ln|x|-\frac{y^4}{4x^4}=C.$$

(3) $\frac{\partial M}{\partial y}=4x^3y+4x^2+4xy+4xy^3+2,\frac{\partial N}{\partial x}=4xy+2.$

得 $$\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\Big/N=\frac{4x^3y+4x^2+4xy^3}{2(y^3+x^2y+x)}=2x,$$

故有 $$\mu(x)=\mathrm{e}^{\int 2x\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^{x^2}.$$

用 $\mu(x)=\mathrm{e}^{x^2}$ 乘原方程两端，得全微分方程

$$\mathrm{e}^{x^2}(2x^3y^2+4x^2y+2xy^2+xy^4+2y)\mathrm{d}x+2\mathrm{e}^{x^2}(y^3+x^2y+x)\mathrm{d}y=0,$$

即 $$\mathrm{d}\left(x^2y^2+2xy+\frac{1}{2}y^4\right)\mathrm{e}^{x^2}=0.$$

故通解为 $$\left(x^2y^2+2xy+\frac{1}{2}y^4\right)\mathrm{e}^{x^2}=C.$$

例 5 求下列方程的积分因子：

(1) 变量可分离方程 $M(x)N(y)\mathrm{d}x+P(x)Q(y)\mathrm{d}y=0$；

(2) 线性方程 $\mathrm{d}y=[p(x)y+f(x)]\mathrm{d}x$；

(3) 贝努利方程 $\mathrm{d}y=[p(x)y+q(x)y^n]\mathrm{d}x$ $(n\neq 0,1)$.

解 (1) 方程左端乘 $\frac{1}{N(y)P(x)}$ 后移项，化为

$$\frac{M(x)}{P(x)}\mathrm{d}x=-\frac{Q(y)}{N(y)}\mathrm{d}y,$$

得通积分 $$\int\frac{M(x)}{P(x)}\mathrm{d}x=-\int\frac{Q(y)}{N(y)}\mathrm{d}y+C.$$

故 $\frac{1}{N(y)P(x)}$ 为变量可分离方程的积分因子.

(2) 将方程化为 $[p(x)y+f(x)]\mathrm{d}x-\mathrm{d}y=0$，由

$$\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\Big/N=-p(x)\Rightarrow\mu(x)=\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x},$$

故 $\mu(x)=\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}$ 为线性方程的积分因子.

(3) 方程化为

$$\mathrm{d}y-p(x)y\mathrm{d}x-q(x)y^n\mathrm{d}x=0.$$

两端乘以 y^{-n}，化为

$$y^{-n}\mathrm{d}y-p(x)y^{1-n}\mathrm{d}x-q(x)\mathrm{d}x=0,$$

即 $$\mathrm{d}(y^{1-n})-(1-n)p(x)y^{1-n}\mathrm{d}x-(1-n)q(x)\mathrm{d}x=0;$$

两端再乘以 $\mathrm{e}^{-(1-n)\int p(x)\mathrm{d}x}$，即得

$$\mathrm{d}\left[y^{1-n}\mathrm{e}^{-(1-n)\int p(x)\mathrm{d}x}\right]-\mathrm{d}\left[\int(1-n)q(x)\mathrm{e}^{(1-n)\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right]=0$$

是全微分方程，故贝努利方程的积分因子是

$$y^{-n}\mathrm{e}^{(1-n)\int p(x)\mathrm{d}x}.$$

例6 设 $f_1(z),f_2(z)$ 连续可微，$\varphi(x,y)=[f_1(xy)-f_2(xy)]xy\neq0$，求证 $\dfrac{1}{\varphi(x,y)}$ 是方程

$$f_1(xy)y\mathrm{d}x+f_2(xy)x\mathrm{d}y=0$$

的一个积分因子.

证 以 $\dfrac{1}{\varphi(x,y)}$ 乘原方程两端，得

$$\frac{f_1(xy)}{x[f_1(xy)-f_2(xy)]}\mathrm{d}x+\frac{f_2(xy)}{y[f_1(xy)-f_2(xy)]}\mathrm{d}y=0,$$

则

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{1}{x}\frac{f_1'(xy)x[f_1(xy)-f_2(xy)]-f_1(xy)x[f_1'(xy)-f_2'(xy)]}{[f_1(xy)-f_2(xy)]^2}$$

$$=\frac{-f_1'(xy)f_2(xy)+f_1(xy)f_2'(xy)}{[f_1(xy)-f_2(xy)]^2}=\frac{\partial N}{\partial x}.$$

所以 $\dfrac{1}{\varphi(x,y)}$ 是方程的一个积分因子.

例7 设 $f(x,y)$ 及 $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ 连续，试证方程

$$\mathrm{d}y-f(x,y)\mathrm{d}x=0$$

为线性方程的充要条件是它仅有依赖于 x 的积分因子.

证 若方程为线性方程，则方程为

$$\mathrm{d}y-p(x)y\mathrm{d}x=0\Rightarrow\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p(x)y.$$

由例5(2)知，积分因子为 $\mu(x)=\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}$，仅依赖于 x.

反之，若积分因子为$\mu(x)$，仅依赖于x，则方程两端乘以$\mu(x)$，得

$$\mu(x)\mathrm{d}y-\mu(x)f(x,y)\mathrm{d}x=0.$$

由
$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}\Rightarrow -\mu(x)\frac{\partial f}{\partial y}=\mu'(x)$$
知，$f(x,y)$只含y，即$f(x,y)=p(x)y$，故方程为线性方程

$$\mathrm{d}y-p(x)y\mathrm{d}x=0\Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p(x)y.$$

例8 已知$f(0)=1/2$，试确定$f(x)$，使得

$$[\mathrm{e}^x+f(x)]y\mathrm{d}x+f(x)\mathrm{d}y=0$$

为全微分方程，并求其通解.

解 由$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$得

$$f'(x)=f(x)+\mathrm{e}^x\Rightarrow f'(x)-f(x)=\mathrm{e}^x,$$

通解为
$$f(x)=\mathrm{e}^{\int \mathrm{d}x}\left[\int \mathrm{e}^x\mathrm{e}^{-\int \mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]=\mathrm{e}^x(x+C).$$
代入$f(0)=1/2$，解得$C=1/2$，即$f(x)=\mathrm{e}^x(x+1/2)$.

于是，全微分方程为

$$[\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^x(x+1/2)]y\mathrm{d}x+\mathrm{e}^x(x+1/2)\mathrm{d}y=0.$$

取(x_0,y_0)为$(0,0)$，用曲线积分方法求得通解为

$$U(x,y)=\int_0^x 0\mathrm{d}x+\int_0^y \mathrm{e}^x(x+1/2)\mathrm{d}y=\mathrm{e}^x(x+1/2)y.$$

例9 设方程$M(x,y)\mathrm{d}x+N(x,y)\mathrm{d}y=0$，证明：它有形如$\mu=\mu(\varphi(x,y))$的积分因子的充要条件是

$$\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\Big/\left(N\frac{\partial \varphi}{\partial x}-M\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)=f(\varphi(x,y)),$$

并求出此积分因子.

证 方程有积分因子μ的充要条件是

$$N\frac{\partial \mu}{\partial x}-M\frac{\partial \mu}{\partial y}=\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\mu.$$

若 $\mu=\mu(\varphi(x,y))$，则上式化为

$$N\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial x}-M\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\mu(\varphi(x,y)),$$

则 $\mu=\mu(\varphi(x,y))$ 满足微分方程

$$\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\varphi}=\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\left(N\frac{\partial\varphi}{\partial x}-M\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^{-1}\mu(\varphi(x,y)).$$

从而知，$\mu=\mu(\varphi(x,y))$ 为方程积分因子的充要条件是

$$\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\Big/\left(N\frac{\partial\varphi}{\partial x}-M\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)=f(\varphi(x,y)).$$

由上面微分方程可解得

$$\mu(\varphi(x,y))=\mathrm{e}^{\int f(\varphi(x,y))\mathrm{d}\varphi}.$$

第六节　线素场　欧拉折线

主 要 内 容

1. 设方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y)$，$f(x,y)$ 在区域 G 内有定义. 以点 (x,y) 为中点，作一单位线段，使其斜率恰为 $k=f(x,y)$，称为在点 (x,y) 的**线素**，则在 G 内每一点都有一个线素. 于是，方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y)$ 在区域 G 上确定了一个**线素场**(向量场).

2. **定理 1.2**　曲线 L 为方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y)$ 的积分曲线的充要条件是：在 L 上任一点，L 的切线与方程所确定的线素场在该点的线素相重合. L 在每点均与线素场的线素相切.

定理 1.2 表明，方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y)$ 的积分曲线在其上的每一点都与线素场的线素相切. 因而，当方程不可求积时，可以根据线

素场的走向来求近似的积分曲线.

3. **定理 1.3**(皮亚诺(Peano)定理) 假如$f(x,y)$在区域G上连续,$(x_0,y_0)\in G$,则在x_0的某邻域上存在初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=f(x,y),\\ y(x_0)=y_0\end{cases} \qquad ①$$

的解.

定理 1.4(存在与唯一性定理) 假如函数$f(x,y)$在区域G上连续,偏导数$f'_y(x,y)$在G上有界(或连续),则对任意$(x_0,y_0)\in G$,在x_0的某邻域上,初值问题①的解存在且唯一.

疑 难 解 析

1. 如何理解线素场表达微分方程的几何意义?

答 微分方程$\dfrac{dy}{dx}=f(x,y)$的解$y=\varphi(x)$的图像称为方程的积分曲线,而积分曲线在其上每一点都与线素场的线素相切,即可以认为积分曲线是处处"顺着"线素场的线素行进的曲线. 即方程的积分曲线上每一点(x,y)的切线斜率$\dfrac{dy}{dx}$正好等于$f(x,y)$在这点的值. 反之,如果一条曲线上每一点的切线斜率等于$f(x,y)$在这点的值,则这条曲线就是方程$\dfrac{dy}{dx}=f(x,y)$的积分曲线.

当方程$\dfrac{dy}{dx}=f(x,y)$不可求积时,可以根据线素场的走向来近似表示积分曲线.还可以根据线素场本身的性质来研究解的性质,而不必先求出方程的解.

由线素场出发近似画出方程的积分曲线,从几何的角度看,变量x和y是完全平等的. 但是,也存在不够自然的情形,即:(1) 方程确定的线素场排除了点(x,y)的斜率不存在的情况;(2) 只考虑了单值函数的图像.

2. 欧拉(Euler)折线的基本思想是什么?

答 欧拉折线的基本思想是利用**微分中值** $y'(\xi)$ 对 $\frac{dy}{dx}=f(x, y)$,$y(x_0)=y_0$ 的解 $y=y(x)$ 进行近似.

将 x 的区间 $[a,b]$ n 等分,分点 $x_k=x_0+kh, k=0,1,\cdots,n$, $h=(b-a)/n$. 利用

$$y(x_0+h)-y(x_0)=y'(\xi)h, \quad x_0<\xi<x_0+h.$$

用 x_0 代替 ξ 得出 $y(x_0+h)$ 的近似值

$$y_1=y_0+f(x_0,y_0)h.$$

继续下去,可以求得 $y(x)$ 在点 x_k 的近似值

$$y_k=y_{k-1}+f(x_{k-1},y_{k-1})h, \quad k=1,2,\cdots,n.$$

从而得到方程的解在点 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 的近似值. 从几何上看,欧拉折线法就是在局部范围内用切线上的值去代替曲线上的值,得出一系列离散点上解的近似值. 当曲线 $f(x,y)$ 光滑时,n 的增大与 h 的减小,可以使 y_k 与 $y(x_k)$ 的误差变小.

欧拉折线法的优点是计算量较小,而缺点是误差较大. 当 $y(x)$ 二阶可导时,可以利用泰勒(Taylor)公式将 $y(x_0+h)$ 表示为

$$y(x_0+h)=y(x_0)+f'(x_0)h+\frac{1}{2}y''(\xi)h^2, \quad x_0<\xi<x_0+h.$$

用 x_0 代替 ξ 可得

$$y''(x)=f'_x(x,y)+f'_y(x,y)f(x,y).$$

可以得到改进的欧拉折线法计算公式

$$y_{k+1}=y_k+hf(x_k,y_k)+\frac{h^2}{2}[f'_x(x_k,y_k)+f'_y(x_k,y_k)f(x_k,y_k)]$$

$$k=0,1,2,\cdots,n-1.$$

方法、技巧与典型例题分析

例 1 画出下列方程的线素场和过特定点的积分曲线:

(1) $\frac{dy}{dx}=y$，点(0,0)，(0,1)，(0,−1)；

(2) $\frac{dy}{dx}=x$，点(0,0).

解 (1) 由于$f(x,y)=y$不依赖于x，因而在直线$y=k$（k为常数）上，线素场的方向都相同(图1.5(a)). 过点(0,0)，(0,1)，(0,−1)的积分曲线分别为L_1,L_2,L_3. 由于$\frac{dy}{dx}=y$的通解为$y=Ce^x$，所以，L_1是方程过点(0,0)的积分曲线$y=0$；L_2和L_3是分别过点(0,1)与(0,−1)的积分曲线.

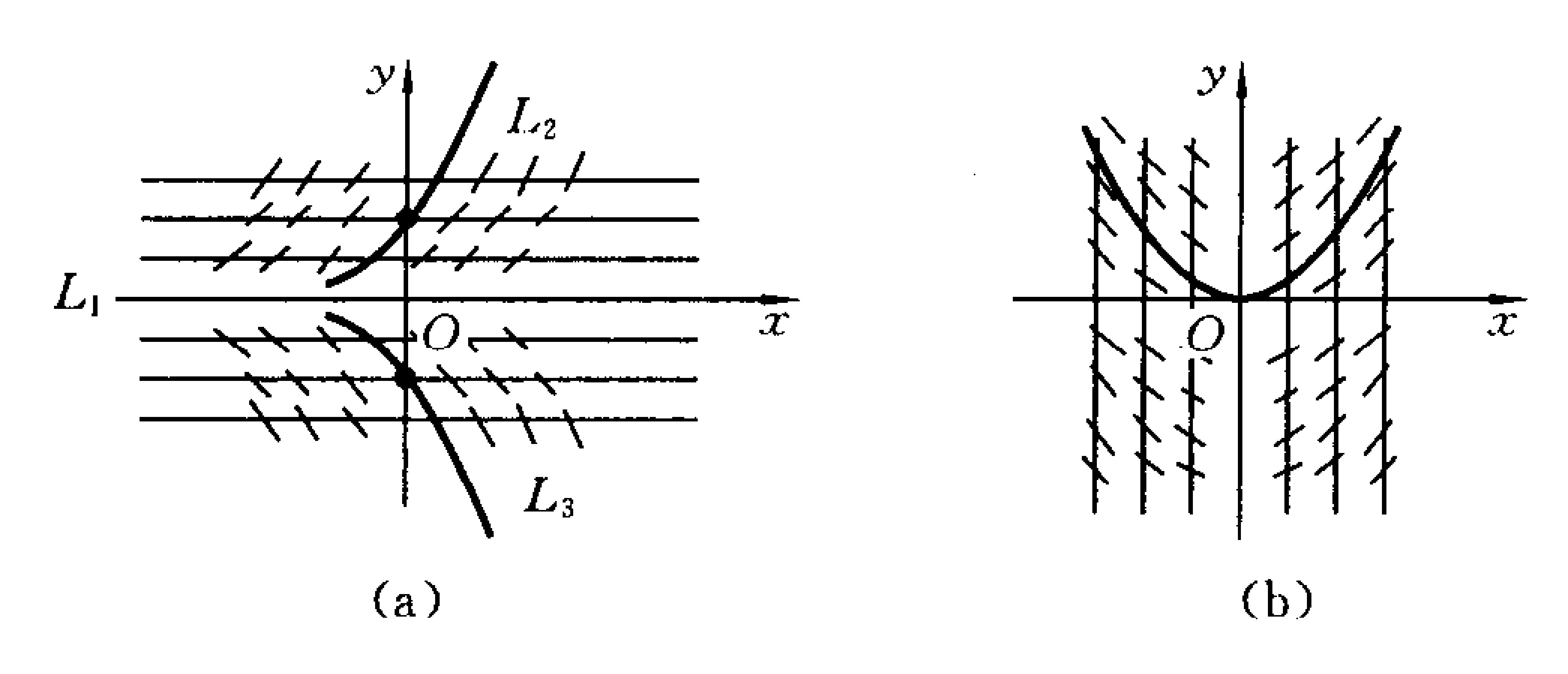


图1.5

如果$\frac{dy}{dx}=-y$，则由通解为$y=Ce^{-x}$可知，积分曲线与$\frac{dy}{dx}=y$的积分曲线关于y轴对称.

(2) 由于$f(x,y)=x$不依赖于y，因而在直线$x=k$（k为常数）上，线素场的方向都相同(图1.5(b)). 由于$\frac{dy}{dx}=x$的通解$\frac{1}{2}x^2+C$是线素场确定的抛物线族，过点(0,0)的积分曲线是抛物线$y=x^2$.

如果$\frac{dy}{dx}=-x$，则由通解为$y=-\frac{x^2}{2}+C$可知，其积分曲线与$\frac{dy}{dx}=x$的积分曲线关于x轴对称.

例2 验证初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=ax \quad (a<0),\\ x(t_0)=x_0\end{cases}$$

存在唯一解.

解 因为$f(t,x)=ax$,$\dfrac{\partial f}{\partial x}=a$均在$(t,x)$的全平面上连续,则由存在与唯一性定理知,对$(t,x)$平面内任一点$(t_0,x)$都有唯一的一条积分曲线通过,即所给初值问题存在唯一解. 可以求得这个解为$x(t)=x_0e^{a(t-t_0)}$.

下面解释方程$y'=f(x,y)$的几何意义. 因为$\dfrac{dy}{dx}$表示积分曲线的斜率,所以在$f(x,y)$的定义域内,有由方程$y'=f(x,y)$确定一个向量场(图1.6). 因此,方程的求解归结为求这样一条曲线,它在每一点处的切线方向与方程所确定的向量场的方向一致.

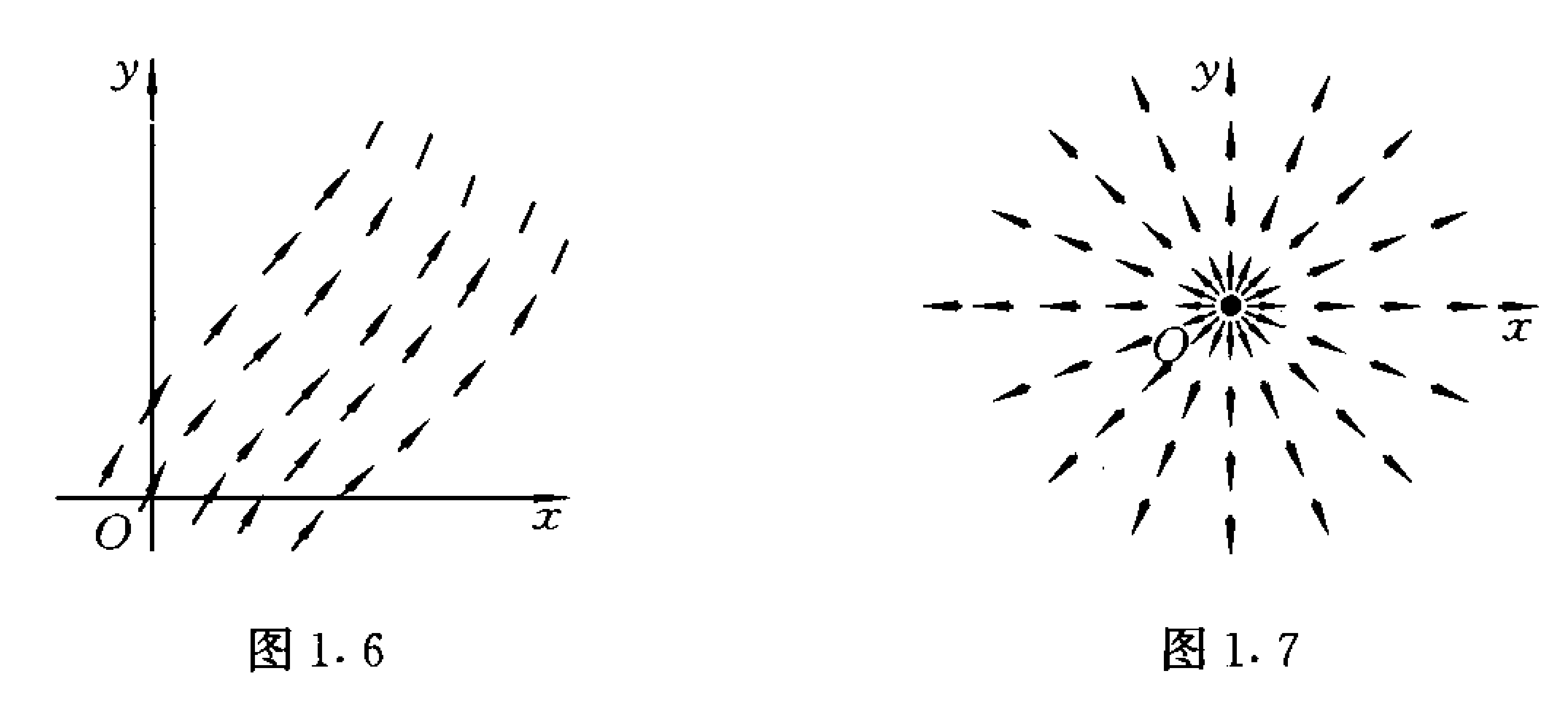


图1.6　　图1.7

例3 讨论方程$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x}$的向量场与积分曲线.

解 容易看出,对任意常数k,直线族$y=kx$是方程$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x}$的积分曲线. 让$\dfrac{dy}{dx}$取值无穷,或者考察方程$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x}$,可知$y$轴也是积分曲线. 由于方程$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x}$在原点$O(0,0)$不能规定方向,所以它的积分曲线是不包括原点的直线族$y=kx$(图1.7).

例4 作出方程$\dfrac{dy}{dx}=-xy$的向量场.

解 作下列简单计算，如表1.1所示.

（1）由于存在关于原点与坐标轴的对称性，故只需作出第一象限情形.

（2）当 x 固定时，斜率随 y 增加而变大（图形变陡）.

（3）当 y 固定时，斜率随 x 增加而变大.

向量场如图1.8所示.

表 1.1

	x	y	$y'=-xy$
若 $x=0$ 或 $y=0$，$y'=0$， 则沿着两条坐标轴的方向线都是水平的	$\begin{cases}0\\ \text{任意}\end{cases}$	任意 0	0 0
若 $x=1$，$y'=-y$，则	$\begin{cases}1\\1\end{cases}$	1 2	-1 -2
若 $x=\frac{1}{2}$，$y'=-\frac{y}{2}$，则	$\begin{cases}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{cases}$	1 2	$-\frac{1}{2}$ -1

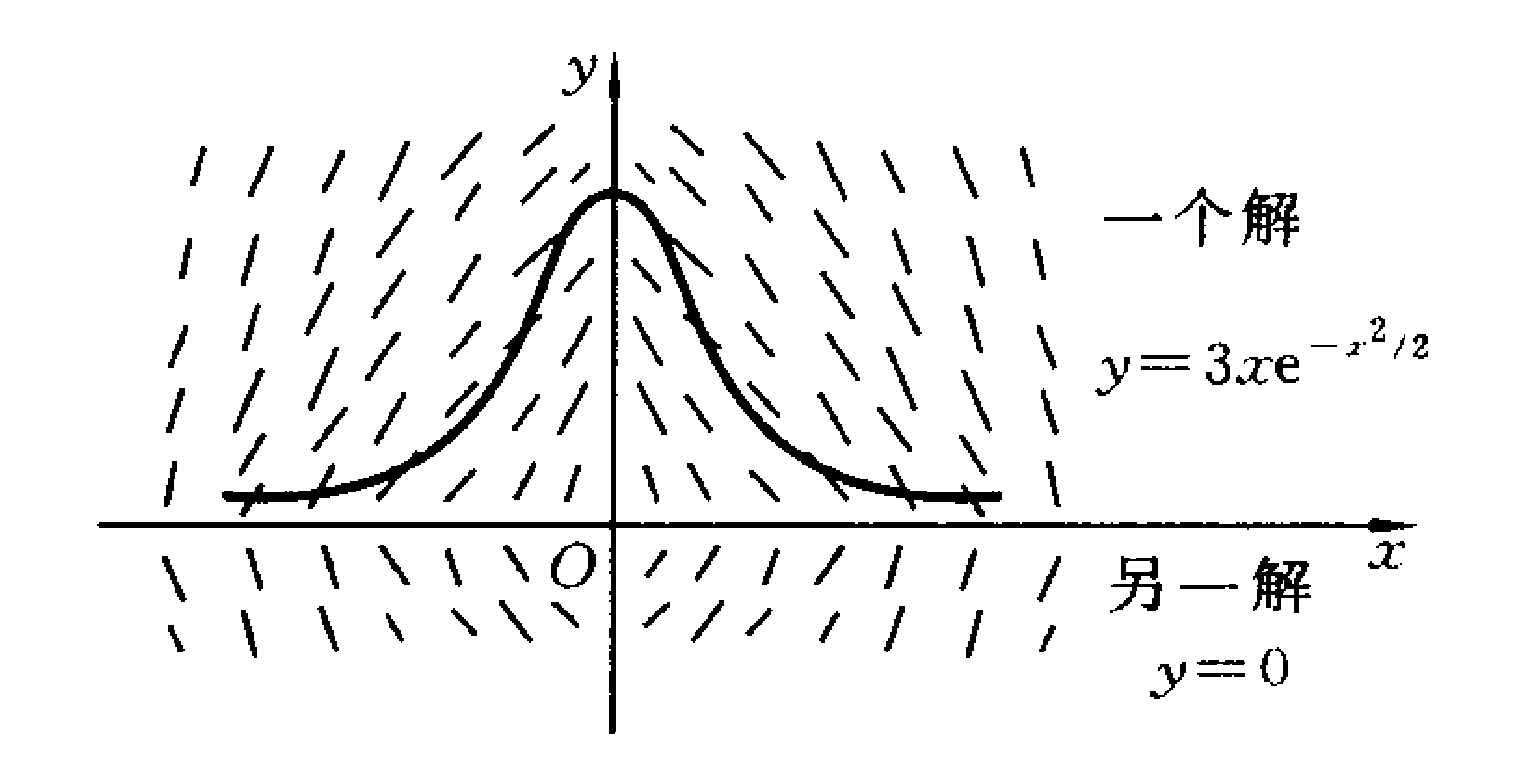


图 1.8

例 5 讨论方程 $\dfrac{dy}{dx}=\sqrt{1-y^2}$ 的积分曲线的分布情形.

解 首先，可以确定 $f(x,y)=\sqrt{1-y^2}$ 仅当 $|y|\leqslant 1$ 时有定义，而 $\dfrac{\partial f}{\partial y}=-\dfrac{y}{\sqrt{1-y^2}}$ 只在 $|y|<1$ 时有定义且连续. 因而在直线 $|y|=1$

上的各点处，存在与唯一性定理条件不满足，唯一性可能不成立.

用积分法可求得原方程通解为

$$\arcsin y = x + C \quad 或 \quad y = \sin(x + C),$$

其中 C 是任意常数. 当 C 固定时，x 的取值区间为 $\left[-\frac{\pi}{2}-C, \frac{\pi}{2}-C\right]$.

可以验证 $y=1$ 与 $y=-1$ 也是方程的解，但它们不包括在通解内（即不能通过 C 的取值得到）.

$y=1$ 与 $y=-1$ 称为方程的奇解.

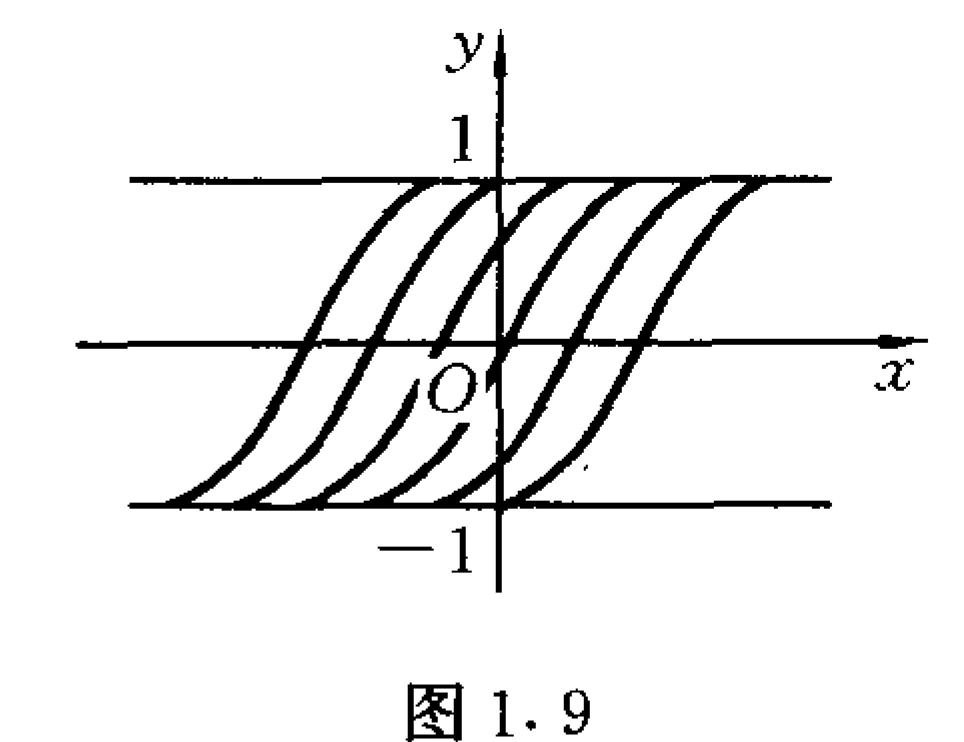


图 1.9

从图 1.9 可以看到，经过 $y=1$ 和 $y=-1$ 上的每一点都有两条解曲线通过，即原方程满足条件 $y(x_0)=1$ 与 $y(x_0)=-1$ 的解有两个，从而初值问题的解不是唯一的. 这就是因为不满足存在与唯一性定理条件的缘故.

例 6 给出下列微分方程的图示解：

(1) $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$； (2) $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{x} \cdot \frac{dy}{dx}$；

(3) $x + y' - 1 = -yy'$.

解 (1) 的解如图 1.10(a)所示，在原点处不存在唯一解；(2) 的解如图 1.10(b)所示，在原点处不存在唯一解；

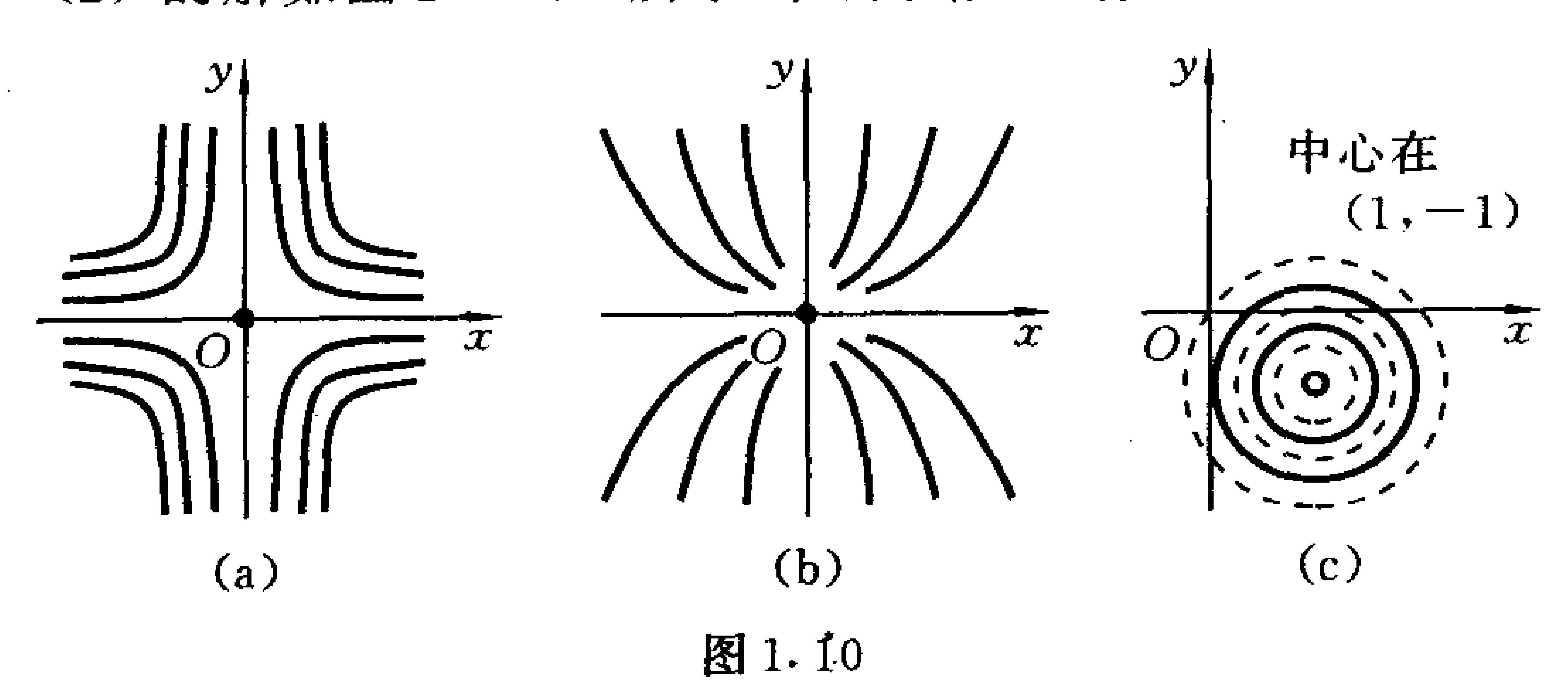


图 1.10

（3）的解如图1.10(c)所示，在点$(1,-1)$处不存在唯一解.

第七节　一阶隐式微分方程

主要内容

$F(x,y,y')=0$ 称为 y' 的**隐式微分方程**.

（1）若由隐式微分方程可解出 $y=f(x,y')$，则引入参数 $p=y'$，得

$$y=f(x,p),\quad y'=p.$$

将 $y=f(x,p)$ 对 x 求导，得

$$p=f'_x(x,p)+f'_p(x,p)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}.$$

若求得通解 $p=p(x,C)$，则 $y=f(x,y')$ 的通解为

$$y=f(x,p(x,C)).$$

若求得通积分 $G(x,p,C)=0$，则由

$$\begin{cases}G(x,p,C)=0,\\ y=f(x,p),\end{cases}$$

消去 p，可得 $y=f(x,y')$ 的通积分.

（2）形如 $y=xy'+\varphi(y')$ 的方程称为**克莱洛**(Clairaut)**方程**. 令 $y'=p$，化为 $y=xp+\varphi(p)$.

设 $\varphi(p)$ 两次可微，且 $\varphi''(p)\neq 0$. 将 $y=xp+\varphi(p)$ 两端对 x 求导，得

$$[x+\varphi'(p)]\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=0.$$

取 $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=0\Rightarrow p=C$，得 $y=xp+\varphi(p)$ 的通解为

$$y=Cx+\varphi(C).$$

取 $x+\varphi'(p)=0$，则由此得特解为

$$\begin{cases} x+\varphi'(p)=0, \\ y=xp+\varphi(p) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=Cx+\varphi(C), \\ x+\varphi'(C)=0. \end{cases} \quad ①$$

这个解也可写为$y=xp(x)+\varphi(p(x))$（$p=p(x)$是由$x+\varphi'(p)=0$确定的隐函数）. 式①所确定的解是克莱洛方程的奇解.

(3) 形如$F(x,y')=0$的方程,若可表示为参数形式

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y'=\psi(t), \end{cases}$$

则由 $\mathrm{d}x=x_t'\mathrm{d}t=\varphi'(t)\mathrm{d}t \Rightarrow \mathrm{d}y=y_x'\mathrm{d}x=\psi(t)\varphi'(t)\mathrm{d}t$,

故通解为

$$y=\int\psi(t)\varphi'(t)\mathrm{d}t+C,$$

即方程有参数形式的解

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\int\psi(t)\varphi'(t)\mathrm{d}t+C. \end{cases}$$

(4) 形如$F(y,y')=0$的方程若可表示为参数形式

$$\begin{cases} y=\varphi(t), \\ y'=\psi(t). \end{cases}$$

则 $\mathrm{d}x=\dfrac{\mathrm{d}y}{y_x'}=\dfrac{\varphi'(t)\mathrm{d}t}{\psi(t)} \Rightarrow x=\int\dfrac{\varphi'(t)}{\psi(t)}\mathrm{d}t+C$,

即方程有参数形式的解

$$\begin{cases} x=\int\dfrac{\varphi'(t)}{\psi(t)}\mathrm{d}t+C, \\ y=\varphi(t). \end{cases}$$

疑 难 解 析

1. 一阶隐式方程怎样求解?

答 若能从隐式方程$F(x,y,y')=0$中直接解出y',得到m个形如

$$y'=f_k(x,y),\quad k=1,2,\cdots,m$$

的显式方程，则由积分法可解这些方程.

对 y' 无法解出的，可用引进参数的方法求解，分别为：

（1）$y=f(x,y')$ 型. 引入参数 $y'_x=p$，可求得通解为

$$y=f(x,p(x,C)),$$

或参数形式通解

$$\begin{cases}G(x,p,C)=0,\\ y=f(x,p),\end{cases}$$

其中 $p(x,C)$ 是 $p=f'_x(x,p)+f'_y(x,p)\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$ 的通解，$G(x,p,C)$ 是其通积分.

（2）当 $G(x,y,y')=0$ 能对 x 解出时，如 $x=f(y,y')$ 型，引入参数 $y'_x=p$，可求得通解为

$$x=f(y,\varphi(y,C)),$$

或参数形式的通解

$$\begin{cases}x=f(y,p),\\ H(y,p,C)=0,\end{cases}$$

其中 $\varphi(y,C)$ 是 $\dfrac{1}{p}=f'_y(y,p)+f'_p(y,p)\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$ 的通解，$H(y,p,C)$ 是其通积分.

（3）$F(x,y')=0$ 型. 设 $x=\varphi(t)$，$y'=\psi(t)$，则通解为

$$y=\int\psi(t)\varphi'(t)\mathrm{d}t+C.$$

隐式通解为

$$\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\displaystyle\int\psi(t)\varphi'(t)\mathrm{d}t+C.\end{cases}$$

（4）$F(y,y')=0$ 型. 设 $y=\varphi(t)$，$y'=\psi(t)$，则通解为

$$x=\int\frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}\mathrm{d}t+C.$$

隐式通解为

$$\begin{cases} x=\int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}\mathrm{d}t+C, \\ y=\varphi(t). \end{cases}$$

（5）克莱洛方程 $y=xy'+\varphi(y')$. 令 $y'=p$,通解为

$$y=xC+\varphi(C).$$

对 $x+\varphi(p)=0$,有参数形式特解

$$\begin{cases} x+\varphi'(p)=0, \\ y=xp+\varphi(p). \end{cases}$$

2. 什么是包络与奇解？怎样求包络与奇解？

答 设一阶微分方程 $F(x,y,y')=0$ 的通积分为 $\Phi(x,y,C)=0$,它确定了一个单参数平面曲线族 (C). 如果存在一条曲线 L,在 L 上每一点 $(x(C),y(C))$ 均与单参数平面曲线族 (C) 中的不同曲线相切,则该曲线 L 称为单参数平面曲线族 (C) 的**包络**.

微分方程 $F(x,y,y')=0$ 的通积分 $\Phi(x,y,C)=0$ 的包络,称为该微分方程的**奇解**. 奇解是微分方程的解,由于在包络 L 上的每一点至少有两条积分曲线与线素场的同一线素相切,从而知奇解上每一点的解的唯一性定理不再成立,所以奇解不是通解中的解.

曲线族 $\Phi(x,y,C)=0$ 的包络方程式由方程组

$$\begin{cases} \Phi(x,y,C)=0, \\ \Phi'_C(x,y,C)=0 \end{cases}$$

给出. 若解出 $x=x(C)$, $y=y(C)$,即得包络的参数方程;若消去 C,即得包络的直角坐标方程,即奇解 $y=y(x)$.

方程 $F(x,y,y')=0$ 的奇解,除了用消去 C 的方法(称 C-判别曲线法)得到外,还可用 p-判别曲线法求得.

即,令 $y'=p$,方程化为 $F(x,y,p)=0$. 奇解由方程组

$$\begin{cases} F(x,y,p)=0, \\ F'_p(x,y,p)=0 \end{cases}$$

给出．消去p，得p-判别曲线．但究竟哪一条是奇解还需实际验证．

方法、技巧与典型例题分析

在解一阶隐式方程时，首先要分清方程的类型，再选用适当的方法求解．

例 1 求解下列方程：

(1) $y'^2-y^2=0$； (2) $8y'^3=27y$；

(3) $y^2(y'^2+1)=1$； (4) $y'^2=4y^3(1-y)$.

解 (1) 将方程改写为$y'^2=y^2$，得微分方程

$$y'=\pm y,$$

其通解为

$$y=Ce^{\pm x}.$$

(2) 将方程改写为$y'=\frac{3}{2}\sqrt[3]{y}$．分离变量后两端积分，得

$$y^{-1/3}dy=\frac{3}{2}dx \Rightarrow \frac{3}{2}y^{2/3}=\frac{3}{2}x+C_1 \quad (y\neq 0).$$

两端三次方，得通解

$$y^2=(x+C)^3.$$

$y=0$ 也是原方程的解．

(3) 令$y'=\tan t$，则原方程化为$y=\pm\cos t$．又

$$dx=\frac{dy}{y'}=\frac{\mp\sin t dt}{\tan t}=\mp\cos t dt,$$

得

$$x=\mp\sin t+C.$$

故方程有参数形式通解

$$\begin{cases}x=\mp\sin t+C,\\ y=\mp\cos t.\end{cases}$$

消去参数t，得通解

$$(C-x)^2+y^2=1.$$

$y=\pm 1$ 也是原方程的解．

(4) 将方程化为 $y'=\pm 2y^2\sqrt{\frac{1}{y}-1}$，分离变量，得

$$\frac{\mathrm{d}y}{2y^2\sqrt{1/y-1}}=\pm\mathrm{d}x\quad(y\neq 0,1).$$

两端积分，得

$$\sqrt{\frac{1}{y}-1}=\mp x+C,$$

即通解为

$$y=\frac{1}{1+(\mp x+C)^2}.$$

$y=0$，$y=1$ 也是原方程的解.

例 2 求解下列方程：

(1) $x=y+a\ln\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$；　　(2) $y=yy'^2+2yy'$；

(3) $y'(x-\ln y')=1$；　　(4) $y=(y'-1)\mathrm{e}^{y'}$.

解 (1) 设 $p=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，将方程改写为 $x=y+a\ln p$. 两端微分，得

$$\mathrm{d}y=-\frac{a\mathrm{d}p}{p-1}.$$

两端积分，得

$$y=C-a\ln(p-1).$$

于是

$$x=C+a\ln\frac{p}{p-1}.$$

即有参数形式的通解

$$\begin{cases}x=C+a\ln\dfrac{p}{p-1},\\ y=C-a\ln(p-1).\end{cases}$$

(2) 设 $p=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，将方程改写为 $y=yp^2+2px$，解得

$$p=-\frac{x}{y}+\sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^2+1}.$$

设 $u=\frac{y}{x}$，则 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$，代入上式，得

$$\frac{u\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u^2}-(u^2+1)}=\frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

设 $1+u^2=t^2$，则得变量分离方程

$$\frac{\mathrm{d}t}{t-1}=-\frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

两端积分，得

$$t-1=\frac{C}{x}.$$

代回 t 和 u，得原方程通解为

$$x^2+y^2=(x+C)^2 \quad 或 \quad y^2=2Cx+C^2.$$

(3) 将方程化为 $x=\ln y'+\frac{1}{y'}$，设 $y'=p$，得

$$x=\ln p+\frac{1}{p}.$$

两端对 y 求导，得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{1}{p}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}-\frac{1}{p^2}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} \Rightarrow \frac{p-1}{p}\mathrm{d}p=\mathrm{d}y.$$

两端积分，得

$$p-\ln|p|=y+C.$$

即原方程有参数形式的通解

$$\begin{cases}x=\ln p+\frac{1}{p},\\ y=p-\ln|p|-C.\end{cases}$$

(4) 设 $y'=p$，将方程化为 $y=(p-1)\mathrm{e}^p$. 两端对 x 求导，得

$$p=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^p+(p-1)\mathrm{e}^p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} \Rightarrow p\left(\mathrm{e}^p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}-1\right)=0.$$

由 $\mathrm{e}^p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}-1=0$ 解得 $\mathrm{e}^p=x+C$，得参数形式的通解

$$\begin{cases}x=\mathrm{e}^p-C,\\ y=(p-1)\mathrm{e}^p.\end{cases}$$

由 $p=0$ 得原方程的一个特解 $y=-1$.

例 3 求解下列方程：

(1) $y=xy'+y'+y'^2$; (2) $x^2(y-xy')=yy'^2$;

(3) $(a^2-x^2)y'^2+2xyy'+x^2=0$; (4) $4e^{2y}(y')^2+2xy'-1=0$.

解 所给方程均可化为克莱洛方程后求解.

(1) 方程是克莱洛方程，其通解由 $y=xC+\varphi(C)$ 得出. 即

$$y=xC+(C+C^2).$$

由 $\varphi(p)=p+p^2$ 得 $\varphi'(p)=1+2p$，故方程的奇解为

$$\begin{cases}x=-\varphi'(p)=-(1+2p),\\ y=xp+\varphi(p)=-p^2.\end{cases}$$

从上式消去 p，得特解 $y=-\dfrac{1}{4}(x+1)^2$.

(2) 设 $x^2=u$，$y^2=v$，原方程化为

$$v=u\frac{dv}{du}+\left(\frac{dv}{du}\right)^2,$$

是以 v 为未知函数的克莱洛方程，其通解为

$$v=Cu+C^2,$$

即原方程通解为 $y^2=Cx^2+C$.

又由克莱洛方程特解

$$\begin{cases}u=-2p,\\ v=p^2\end{cases}$$

消去 p，得 $v=u^2/4$，代回即得原方程特解 $y^2=-x^4/4$. 但此式无意义，故原方程无特解.

(3) 设 $u=x^2$，$v=2y$，原方程化为

$$u=v\frac{du}{dv}+\left(\frac{du}{dv}\right)^2+a^2,$$

是克莱洛方程，其通解为

$$u=vC+C^2+a^2.$$

特解为
$$\begin{cases}v=-2p,\\ u=vp+p^2+a^2\end{cases}\xRightarrow{\text{消去}p}u=-\frac{v^2}{4}+a^2.$$

代回，得原方程通解为

$$x^2=2yC+C^2+a^2.$$

特解为 $$x^2+y^2=a^2.$$

（4）设 $v=\mathrm{e}^{2y}$，方程化为

$$v=x\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}+\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right)^2,$$

是克莱洛方程，通解为

$$v=xC+C^2.$$

特解为 $$\begin{cases}x=-2p,\\ v=-p^2\end{cases}\xRightarrow{\text{消去}p} v=-\frac{x^2}{4}.$$

代回，得原方程通解为

$$\mathrm{e}^{2y}=xC+C^2.$$

特解为 $$\mathrm{e}^{2y}=-\frac{x^2}{4}.$$

但上式无意义，故原方程无特解.

克莱洛方程是拉格朗日（Lagrange）方程 $y=x(\varphi(y')+\psi(y'))$ 当 $\varphi(y')=y'$ 的特殊情形，其特点是永远有奇解.

例 4 求解拉格朗日方程

$$y=2x(y')^2+y'.$$

解 设 $y'=p$，原方程化为 $y=2xp^2+p$.

方程两端对 x 求导，得

$$y'=2p^2+4xp\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}.$$

两端除以$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$，得

$$(p-2p^2)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p}=4px+1\Rightarrow\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p}=\frac{-4}{2p-1}x+\frac{1}{p-2p^2},$$

是一阶线性方程，通解为

$$x=\frac{1}{(2p-1)^2}(\ln|p|-2p+C).$$

与$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p}=\dfrac{-4}{2p-1}x+\dfrac{1}{p-2p^2}$联立，消去 p 得原方程通解

$$\begin{cases} y=2xp^2+p, \\ x=\dfrac{1}{2(p-1)^2}(\ln|p|-2p+C). \end{cases}$$

由 $p-2p^2=0$ 得 $p=0, p=\dfrac{1}{2}$，则 $y=0, y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}$ 也是原方程的解.

例 5 求下列曲线族的包络：

(1) $C^2y+Cx^2-1=0$； (2) $(x-C)^2+y^2=4C$.

解 用C-判别曲线法.

(1)
$$\begin{cases} \Phi=C^2y+Cx^2-1=0, \\ \Phi'_C=2Cy+x^2=0, \end{cases}$$

消去C，解得C-判别曲线

$$x^4+4y=0.$$

经检验
$$\Phi_x^2+\Phi_y^2=4C^2x^2+C^4\neq 0,$$

故所求曲线族的包络为

$$x^4+4y=0.$$

(2)
$$\begin{cases} \Phi=(x-C)^2+y^2-4C=0, \\ \Phi'_C=-2(x-C)-4=0, \end{cases}$$

消去C，解得C-判别曲线

$$y^2=4(x+1).$$

经检验
$$\Phi_x^2+\Phi_y^2=4(x-C)^2+4y^2=16C\neq 0,$$

故所求曲线族的包络为

$$y^2=4(x+1).$$

例 6 求下列方程的奇解：

(1) $y=x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+a\sqrt{1+\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}$； (2) $xp^2-2yp+ax=0$；

(3) $\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2[(x-y)^2-1]-2\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+[(x-y)^2-1]=0$.

解 (1) 所给方程是克莱洛方程，通解为

$$y=Cx+a\sqrt{1+C^2}.$$

化为 $$C^2(a^2-x^2)+2Cxy+a^2-y^2=0,$$

则有等根的条件为

$$4x^2y^2-4(a^2-x^2)(a^2-y^2)=0,$$

即所求奇解为 $$x^2+y^2=a^2.$$

(2) 方程化为 $p=\frac{y}{x}+\sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^2-a}$，设 $u=\frac{y}{x}$，则

$$\frac{dy}{dx}=p=u+x\frac{du}{dx},$$

得 $$x\frac{du}{dx}=\sqrt{u^2-a}.$$

解得 $$\ln(u+\sqrt{u^2-a})=\ln Cx \Rightarrow 2xu=Cx^2+\frac{a}{C}.$$

代回，得通解 $$2y=Cx^2+\frac{a}{C}.$$

$$\begin{cases}\Phi(x,y,C)=2y-Cx^2-\frac{a}{C}=0,\\ \Phi'_C(x,y,C)=-x^2+\frac{a}{C^2}=0,\end{cases}$$

解得 $C=\sqrt{A}/x$，代入通解，得所求奇解为

$$y^2=ax^2.$$

(3) 用 p-判别曲线法. 设 $\frac{dy}{dx}=p$，则由

$$\begin{cases}p^2[(x-y)^2-1]-2p+[(x-y)^2-1]=0,\\ 2p[(x-y)^2-1]-2=0,\end{cases}$$

消去 p，得 $$[(x-y)^2-1]=1.$$

故 p-判别曲线为

$$\begin{cases}x-y=\pm\sqrt{2},\\ y=x,\end{cases}$$

经检验 $x-y=\pm\sqrt{2}$ 是奇解，而 $y=0$ 不是.

例 7 求一曲线，具有如下性质：曲线上任一点的切线，在 x，y

轴上截距之和为1.

解 设曲线方程为 $y=y(x)$.

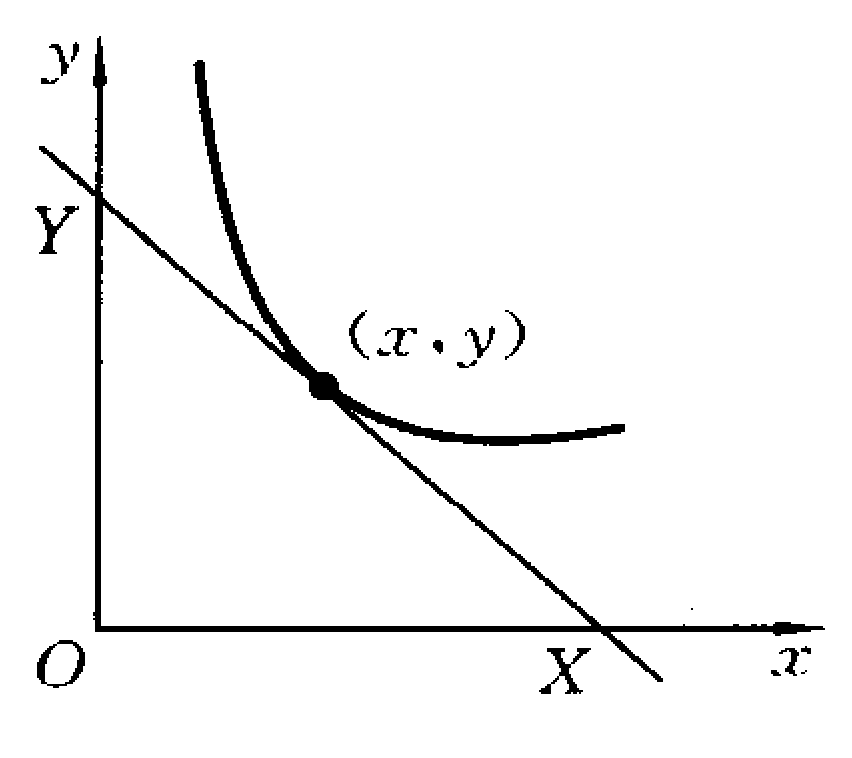


图1.11

如图1.11所示，曲线上任一点 (x, y) 的切线方程为 $Y-y=y'(X-x)$，则截距为

$$X=x-\frac{y}{y'},\quad Y=y-xy'.$$

依题意，得

$$x-\frac{y}{y'}+y-xy'=1 \Rightarrow y=xy'-\frac{y'}{1-y'}$$

是克莱洛方程，其参数形式的通解为

$$\begin{cases} y=Cx-\dfrac{C}{1-C}=Cx+\dfrac{C}{C-1}, \\ x=\dfrac{1}{(1-C)^2}. \end{cases}$$

例8 在第一象限求一曲线，使其上每一点与两坐标轴所围成的三角形的面积均等于2.

解 设曲线方程为 $y=y(x)$，曲线上任一点 (x, y) 的切线方程为 $Y-y=y'(X-x)$，则截距为

$$X=x-\frac{y}{y'},\quad Y=y-xy'.$$

依题意，得 $\frac{1}{2}\left(x-\frac{y}{y'}\right)(y-xy')=2 \Rightarrow (y-xy')^2=-4y'$.

解出 y，得克莱洛方程

$$y=xy'\pm 2\sqrt{-y'} \quad (y'<0),$$

通解为
$$y=Cx\pm 2\sqrt{-C},$$

是直线族. 还有参数形式的通解为

$$\begin{cases} y=Cx\pm 2\sqrt{-C}, \\ x\mp\dfrac{1}{\sqrt{-C}}=0, \end{cases}$$

消去 C，得所求曲线 $xy=1$.

例 9 解微分方程 $y^2(1-(y')^2)=1$.

解 此题可用多种方法求解.

解法一 由原方程解出 $y'=\pm\frac{\sqrt{y^2-1}}{y}$. 令 $y^2-1\neq0$,则分离变量后两端积分,得

$$x=\pm\sqrt{y^2-1}+C.$$

原方程通解为 $$y^2=(x-C)^2+1.$$

由 $y^2-1=0$ 知,$y=\pm1$ 也是原方程的解.

解法二 用参数法. 令 $y'=\cos t$,代入原方程,得 $y=\pm\frac{1}{\sin t}$,则由 $\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}y}{y'}$ $(y'\neq0)$,得

$$\mathrm{d}x=\mp\frac{1}{\sin^2 t}.$$

两端积分,得 $$x=\pm\cot t+C.$$

故原方程参数形式通解为

$$\begin{cases}x=\pm\cot t+C,\\ y=\pm\frac{1}{\sin t}.\end{cases}$$

由 $y'=0$ 知,$y=\pm1$ 也是原方程通解.

解法三 用参数法. 令 $y'=t$,代入原方程,得 $y=\pm\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$,则由 $\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}y}{y'}$ $(y'\neq0)$,得

$$\mathrm{d}x=\pm\frac{1}{(1-t^2)^{3/2}}\mathrm{d}t,$$

两端积分,得 $$x=\pm\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}+C.$$

故原方程的参数形式的通解为

$$\begin{cases}x=\pm\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}+C,\\ y=\pm\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}.\end{cases}$$

由 $y'=0$ 知，$y=\pm 1$ 也是原方程的解.

解法四 还用参数法. 令 $1-y'^2=\dfrac{t}{y}$，代入原方程，得 $y=\dfrac{1}{t}$，且 $y'=\pm\sqrt{1-t^2}$，则由 $\mathrm{d}x=\dfrac{\mathrm{d}y}{y'}$ $(y'\neq 0)$，得

$$\mathrm{d}x=\mp\frac{\mathrm{d}t}{t^2\sqrt{1-t^2}}.$$

两端积分，得

$$x=\pm\frac{\sqrt{1-t^2}}{t}+C.$$

故原方程有参数形式的通解为

$$\begin{cases} x=\pm\dfrac{\sqrt{1-t^2}}{t}+C, \\ y=\dfrac{1}{t}. \end{cases}$$

由 $y'=0$ 知，$y=\pm 1$ 也是原方程的解.

解法五 由方程解出 $y=\pm\dfrac{1}{\sqrt{1-y'^2}}$. 令 $y'=p$，则

$$y=\pm\frac{1}{\sqrt{1-p^2}}.$$

两端对 x 求导，得

$$p=\pm\frac{p}{(1-p^2)^{3/2}}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\Rightarrow\left(\pm\frac{1}{(1-p^2)^{3/2}}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}-1\right)p=0.$$

由

$$\pm\frac{1}{(1-p^2)^{3/2}}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=1\Rightarrow \mathrm{d}x=\pm\frac{1}{(1-p^2)^{3/2}}\mathrm{d}p.$$

两端积分，得

$$x=\pm\frac{p}{\sqrt{1-p^2}}+C.$$

故原方程有参数形式的通解为

$$\begin{cases} x=\pm\dfrac{p}{\sqrt{1-p^2}}+C, \\ y=\pm\dfrac{1}{\sqrt{1-p^2}}. \end{cases}$$

由 $p=0$ 知，$y=\pm 1$ 也是原方程的解.

例 10 求能将平行光线聚焦于一点的反射镜.

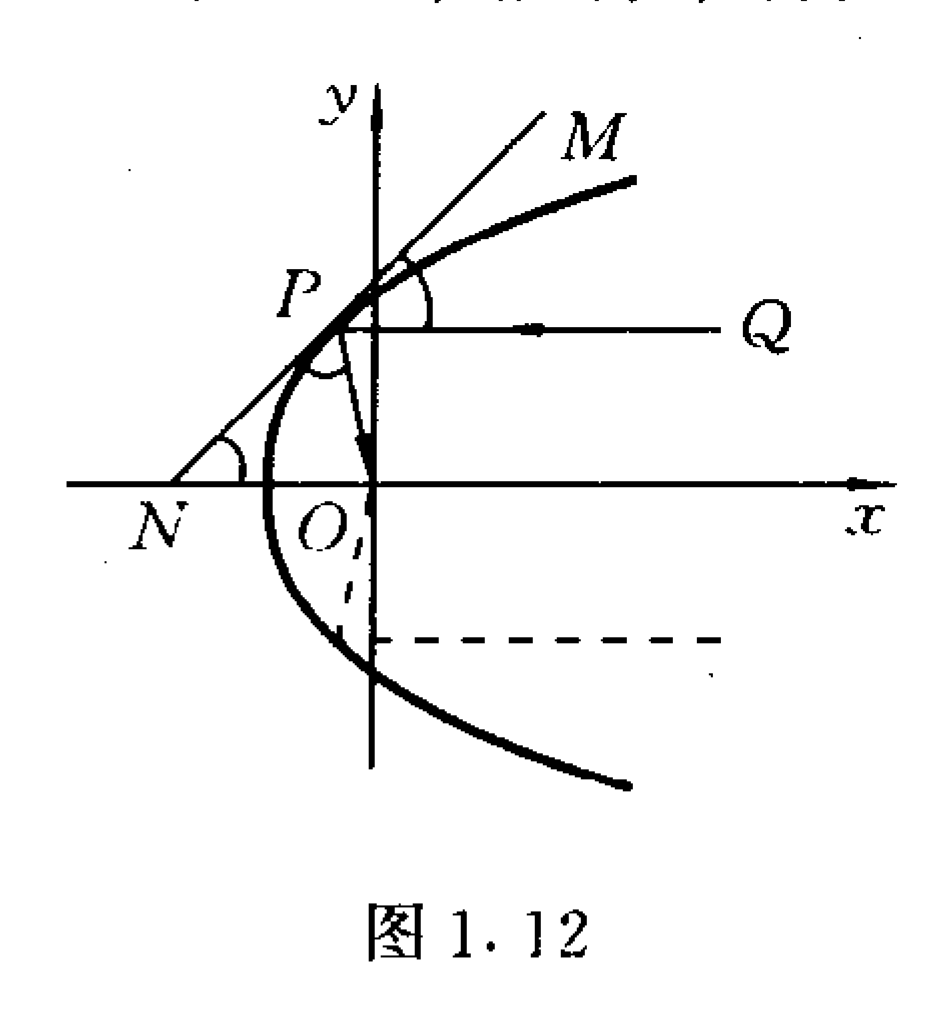


图 1.12

解 先求有同样性质的平面曲线 $y=y(x)$. 作图如图1.12 所示，O 为焦点，QP 为入射光线，PO 为反射光线，则 $\angle QPM=\angle OPN$，且 $|ON|=|OP|$，M 与 $y(x)$ 相切. 则点 N 的横坐标由

$$\begin{cases} Y-y=y'(X-x)\text{（切线方程）}, \\ Y=0 \end{cases}$$

确定. 解方程组，得点 N 的横坐标 $X=x-\dfrac{y}{y'}$.

由 $|ON|=\left|x-\dfrac{y}{y'}\right|=|OP|=\sqrt{x^2+y^2}$，得曲线微分方程

$$\left|x-\frac{y}{y'}\right|=\sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow y=\frac{2y'}{1-y'^2}x$$

是拉格朗日方程. 令 $y'=p$，得

$$y=\frac{2p}{1-p^2}x.$$

两端对 x 求导，得

$$p=\frac{2p}{1-p^2}+x\,\frac{2(1+p^2)}{(1-p^2)^2}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} \Rightarrow p(p^2-1)=2x\,\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}.$$

分离变量后两端积分，得 $x=C\,\dfrac{p^2-1}{p^2}$.

方程的参数形式的通解为

$$\begin{cases} x=C\,\dfrac{p^2-1}{p^2}, \\ y=\dfrac{2p}{1-p^2}x \end{cases} \xRightarrow{\text{消去}p} y^2=4C(x+C)$$

此即所求抛物线. 绕 x 轴旋转所得旋转抛物面即为所求镜面方程.

第八节　一阶微分方程的等角轨线与应用

主 要 内 容

1. 若有曲线或曲线族 $y=y(x)$，使得它与某已知曲线族的每一条曲线都相交成给定的角度 α，则称曲线 $y=y(x)$ 为已知曲线族的**等角轨线**.

2. 当 $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$ 时，等角轨线称为**正交轨线**.

3. 在动力学中，用微分方程解决动力学的基本关系式是牛顿第二定律：$F=ma$. 如果找出外力 F 和位移及其对时间的导数——速度的关系，就可以由 $F=ma$ 列出微分方程.

4. 流体混合问题. 设容器内装有含物质 A 的流体，在时刻 $t=0$ 时，流体体积为 V_0，物质 A 的质量为 x_0（从而浓度可求）. 现以速度 v_2 放出流体，又以速度 v_1 注入浓度为 c_1 的流体，要求出时刻 t 时容器中物质 A 的质量及流体的浓度.

用微元法列出方程，得初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{v_2}{V_0+(v_1-v_2)t}x+C_1v_1,\\ x(0)=x_0.\end{cases}$$

疑 难 解 析

1. 怎样求曲线族的等角轨线与正交轨线？

答　设曲线族为 $\Phi(x,y,C)=0$，则由

$$\begin{cases}\Phi(x,y,C)=0,\\ \Phi'_x(x,y,C)+\Phi'_y(x,y,C)=0\end{cases}\qquad ①$$

消去C，得出$x,y(x),y'(x)$所应满足的微分方程

$$F(x,y,y')=0.$$

等角轨线($\alpha\neq\pi/2$)的微分方程是

$$F\left(x,y,\frac{y'-k}{1+ky'}\right)=0. \qquad ②$$

正交轨线的微分方程是

$$F(x,y,-1/y')=0. \qquad ③$$

解方程②、方程③，得等角轨线与正交轨线.

2. 怎样建立应用问题的微分方程？

解 有些问题可以直接利用几何、物理、化学和力学知识确定具体问题的自变量、未知函数和未知函数的导数，从而写出微分方程与初始条件.

当存在正比例关系时，比例系数$k>0$. 若未知函数与未知函数的导数同号(或同向)时，k 前取正号；否则取负号.

有的方程不能直接建立，要用微元法对具体问题取其微元进行分析，找出自变量、未知函数与未知函数导数之间的关系，再建立微分方程并确定初始条件.

方法、技巧与典型例题分析

例 1 求抛物线族 $y=ax^2$ 的正交轨线.

解 方程两端对x 求导，得$\frac{dy}{dx}=2ax$. 因为$C=y/x^2$，故知曲线族 $y=ax^2$ 在任一点(x,y)处的切线斜率$\frac{dy}{dx}=\frac{2y}{x}$.

正交轨线族曲线与 $y=ax^2$ 的曲线在点(x,y)正交，故满足

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{2y},$$

即可求得 $y=ax^2$ 的正交轨线族

$$x^2+2y^2=k^2$$

是一族椭圆.

例 2 求曲线族 $x^2+y^2=2ax$ 的正交轨线.

解 方程两端对 x 求导,得 $2x+2y\dfrac{dy}{dx}=2a$,与原方程联立后消去参数 a,得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y^2-x^2}{2xy}.$$

写出正交轨线的微分方程

$$-\frac{1}{y'}=\frac{y^2-x^2}{2xy} \quad 或 \quad \frac{dx}{dy}=\frac{x^2-y^2}{2xy},$$

化为 $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{x}{2y}-\dfrac{y}{2x}$. 令 $\dfrac{x}{y}=u$,可得

$$\frac{2u\,du}{u^2+1}=-\frac{dy}{y}.$$

两端积分,得

$$u^2+1=\frac{C}{y}.$$

代回,得正交轨线

$$x^2+y^2=Cy.$$

例 3 求二次曲线族

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-1}=1 \quad (a^2 \text{ 为参数})$$

的微分方程,并从方程本身证明这曲线族是自正交轨线(即这曲线族中任何两条曲线若相交则一定正交).

解 曲线族方程两端对 x 求导,得 $\dfrac{2x}{a^2}+\dfrac{2yy'}{a^2-1}=0$,与原方程联立后消去 a,得

$$x(x+yy')-\frac{y(x+yy')}{y'}=1 \Rightarrow (xy'-y)(x+yy')=y',$$

即曲线族满足的微分方程

$$(x^2-y^2-1)y'+xyy'^2-xy=0.$$

以 $-1/y'$ 代替方程中 y' 所得方程与上述方程一致,故曲线族是自正交轨线族.

例4 一曲线上点$P(x,y)$处的法线与x轴的交点为Q，且PQ被y轴平分．求曲线满足的微分方程．

解 设曲线方程为$y=y(x)$，则$P(x,y)$处法线斜率为$-1/y'$，Q点坐标为$(-x,0)$，故有

$$\frac{y-0}{x+x}=-\frac{1}{y'} \Rightarrow yy'+2x=0,$$

故所求微分方程为$yy'+2x=0$.

例5 一小船从河边点O处出发驶向对岸．设船速为v_a，船行方向始终与河岸垂直(设两岸平行)．设河宽为h，河中任一点处的水流速度与该点到两岸距离的乘积成正比．求小船的航行路线．

解 取点O为坐标原点，x轴与河岸重合，y轴正向指向对岸．设时刻t船的坐标为(x,y)，水速$v_b=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=ky(h-y)$，即得

$$\mathrm{d}x=ky(h-y)\mathrm{d}t.$$

又$y=v_at$，从而得微分方程

$$\mathrm{d}x=kv_at(h-v_at)\mathrm{d}t.$$

两端积分，得

$$x=\frac{1}{2}kv_aht^2-\frac{1}{3}kv_a^2t^3+C.$$

由初始条件$x(0)=0$，得$C=0$，则小船航行路线的参数方程

$$\begin{cases}x=\frac{1}{2}kv_aht^2-\frac{1}{3}kv_a^2t^3,\\ y=v_at.\end{cases}$$

其一般方程

$$x=\frac{k}{v_a}\left(\frac{h}{2}y^2-\frac{1}{3}y^3\right).$$

例6 一个半球状的雪堆，其体积融化的速率与半球面面积S成正比，比例常数$k>0$．设在融化过程中雪堆始终保持半球形状，已知半径为r_0的雪堆在开始融化的3 h内，融化了其体积的7/8，则雪堆全部融化需要多少小时？

解 设时刻t雪堆体积$V=\frac{2}{3}\pi r^3$，侧面积$S=2\pi r^2$．由题意，得

$$\frac{dV}{dt}=2\pi r^2\frac{dr}{dt}=-kS=-2\pi r^2 k,$$

即有微分方程 $$\frac{dr}{dt}=-k.$$

分离变量后两端积分，得 $r=-kt+C$.

由 $r|_{t=0}=r_0, V|_{t=3}=\frac{1}{8}V|_{t=0}$，得

$$\frac{2}{3}\pi(r_0-3k)^3=\frac{1}{8}\times\frac{2}{3}\pi r_0^3\Rightarrow k=\frac{1}{6}r_0\Rightarrow r=r_0-\frac{1}{6}r_0 t.$$

因而当 $r=0$ 时 $t=6$，所以雪堆全部融化需 6 h.

例 7 一曲线经过点(2,8)，曲线上任一点到两坐标轴的垂线与两坐标轴构成的矩形被该曲线分为两部分，其中一部分的面积恰好是另一部分面积的两倍，求该曲线的方程.

解 如图1.13 所示. 设曲线方程为 $y=f(x)$，其上任一点 $P(x,y)$ 分矩形面积为 S_A, S_B 两部分，则

$$S_A=\int_0^x (y-f(t))dt,\quad S_B=\int_0^x f(t)dt.$$

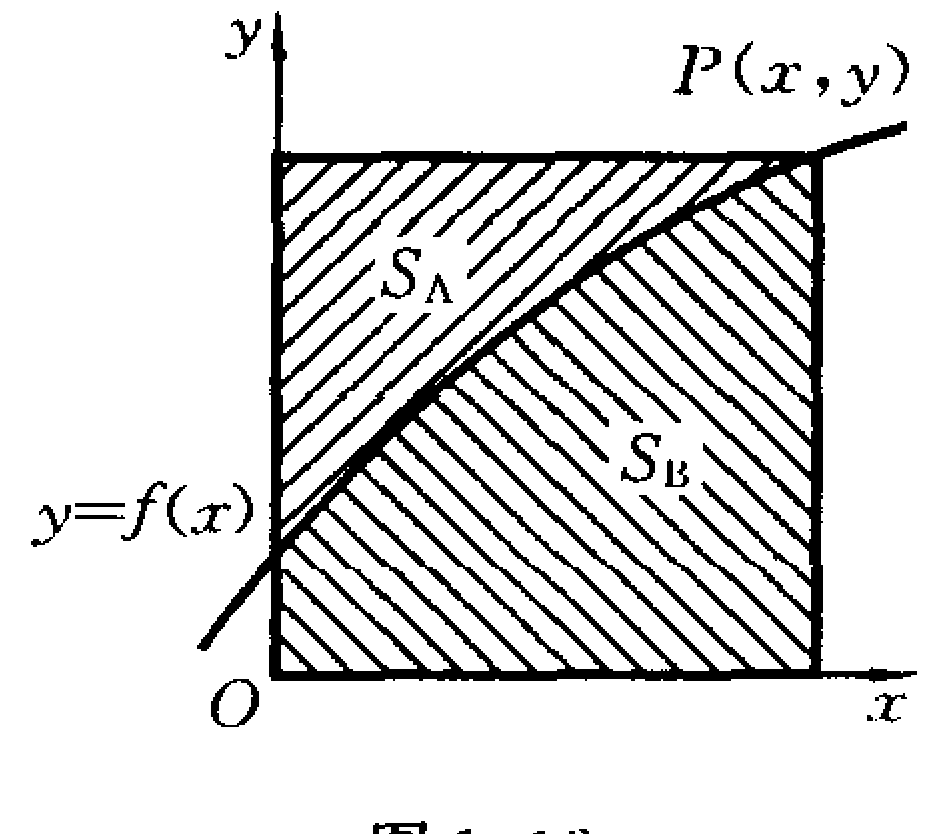


图 1.13

(1) 若 $S_A=2S_B$，则

$$\int_0^x (y-f(t))dt=2\int_0^x f(t)dt,$$

即 $$3\int_0^x f(t)dt=xy=xf(x).$$

两端对 x 求导，得微分方程

$$3f(x)=f(x)+xf'(x)\Rightarrow f'(x)-\frac{2}{x}f(x)=0.$$

通解 $$f(x)=Ce^{\int\frac{2}{x}dx}=Cx^2.$$

由 $f(2)=8$，解出 $C=2$，故此时曲线方程为

$$y=2x^2.$$

(2) 若 $2S_A=S_B$，则

$$2\int_0^x (y-f(t))dt=\int_0^x f(t)dt,$$

即 $$3\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=2xy=2xf(x).$$

两端对 x 求导，得微分方程

$$3f(x)=2f(x)+2xf'(x)\Rightarrow f'(x)-\frac{1}{2x}f(x)=0.$$

通解 $$f(x)=Ce^{\int\frac{1}{2x}\mathrm{d}x}=C\sqrt{x}.$$

由 $f(2)=8$，解得 $C=4\sqrt{2}$，此时曲线方程为

$$y=4\sqrt{2x}\quad 或\quad y^2=32x.$$

例 8 沉淀池内微粒在液体中下落时所受阻力与下落速度的二次方成正比. 设微粒进入池内时的竖直速度为零，求

(1) 在时间 t 内微粒下落多少距离？

(2) 若池长为 L，液体的水平速度为 v，要求所有的微粒都必须沉到池底，液体的最大允许深度为多少？

解 设微粒质量为 m，阻力系数为 k，g 为重力加速度. 坐标竖直向上为正向.

(1) 由牛顿第二定律，得微粒的运动方程

$$\frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}t}=k^2v_1^2-g\quad (v_1\text{ 为微粒下落速度}).$$

分离变量后两端积分，得

$$-\frac{1}{k\sqrt{g}}\arctan\frac{v_1}{\sqrt{g}/k}=t+C_1.$$

代入初始条件 $v_1(0)=0$，得 $C_1=0$，于是

$$\arctan\frac{kv_1}{\sqrt{g}}=-k\sqrt{g}\,t,$$

得 $v_1=-\frac{\sqrt{g}}{k}\tan(kt\sqrt{g})$ 或 $\mathrm{d}y=-\frac{\sqrt{g}}{k}\tan(kt\sqrt{g})\mathrm{d}t.$

两端积分，得通解

$$y=-\frac{1}{k^2}\ln|\cos(kt\sqrt{g})|+C_2.$$

由 $y(0)=y_0$，解得 $C_2=y_0$，得

$$y_0-y=\frac{1}{k^2}\ln|\cos(kt\sqrt{g})|$$

即为时间 t 内微粒下落距离的表达式.

(2) 最上层微粒下落距离为 $h=y_0-y$,下落时间为流入池内液体在池内停留时间 $t=\frac{L}{v}$. 因此最大允许深度表达式为

$$h=\frac{1}{k^2}\ln\left|\cos\left(\frac{kt}{v}\sqrt{g}\right)\right|.$$

例 9 一质量为 m 的降落伞以初速度 v_0 开始降落,若空气的阻力与速度成正比,求降落伞下降速度与时间 t 的关系.

解 设空气阻力系数为 k,降落伞在时刻 t 的速度为 v,则按牛顿第二定律,有

$$mg-kv=m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\Rightarrow\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+\frac{k}{m}v=g,$$

是一阶线性方程,通解

$$y=\mathrm{e}^{-\int\frac{k}{m}\mathrm{d}t}\left[\int g\mathrm{e}^{\int\frac{k}{m}\mathrm{d}t}\mathrm{d}t+C\right]=\frac{m}{k}g+C\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}.$$

代入 $v(0)=v_0$,得 $C=v_0-\frac{mg}{k}$. 于是降落伞下降速度与时间 t 的关系为

$$v=\frac{mg}{k}+\left(v_0-\frac{mg}{k}\right)\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}.$$

例10 某种飞机在机场降落时,为了减少滑行距离,在触地的瞬时,飞机尾部张开减速伞,以增大阻力,使飞机迅速减速停下.

现有质量为9000 kg 的飞机,着陆时水平速度为700 km/h. 经测试,减速伞打开后,飞机所受的总阻力与飞机的速度成正比(比例系数 $k=6\times10^6$). 从着陆点算起,飞机滑行最长距离是多少?

解 设飞机滑行距离为 $x(t)$,速度为 $v(t)$. 依牛顿第二定律,得

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-kv.$$

由 $$\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt}=v\frac{dv}{dx} \Rightarrow dx=-\frac{m}{k}dv.$$

两端积分，得 $$x(t)=-\frac{m}{k}v+C.$$

由 $v(0)=v_0, x(0)=0$，得 $C=\frac{m}{k}v_0$，故

$$x(t)=\frac{m}{k}(v_0-v(t)).$$

当 $v(t)\to 0$ 时，得飞机最大滑行距离

$$\frac{mv_0}{k}=\frac{9000\times 700}{6\times 10^6}\text{ km}=1.05\text{ km}.$$

例11 一容器内装有10 L 盐水，其中含盐1 kg. 现以3 L/min 的速度注入净水，同时以2 L/min 的速度抽出盐水，试求1 h 后容器内溶液的含盐量.

解 设在时刻 t 时溶液的含盐量为 $x(t)$，在时刻 $t+\Delta t$ 的含盐量为 $x(t)+\Delta x$. 则由题设知

$$\Delta x=-\frac{2x\Delta t}{10+(3-2)t}=-\frac{2x\Delta t}{10+t},$$

即 $$\frac{\Delta x}{\Delta t}=-\frac{2x}{10+t} \Rightarrow \frac{dx}{dt}+\frac{2}{10+t}x=0$$

是一阶线性方程，通解

$$x(t)=Ce^{-\int\frac{2}{10+t}dt}=\frac{C}{(10+t)^2}.$$

由 $x(0)=1$，得 $C=100$，则知1 h 后容器内含盐量

$$x(60)=\frac{100}{(10+60)^2}\text{ kg}=\frac{1}{49}\text{ kg}.$$

例12 某湖泊的水量为 V，每年排入湖泊内含污染物A 的污水量为 $V/6$，流入湖泊内不含A 的水量为 $V/6$，流出湖泊的水为 $V/3$. 已知1995 年年底湖中A 的含量为 $5m_0$，超过国家规定的指标. 为治理污染，从2006 年初起，限定排入湖泊中含A 污水的浓度不超过 m_0/V. 问至多需经过多少年，湖泊中污染物A 的含量降至 m_0 以内(设湖水中A 的浓度是均匀的)?

答 设2006年初$t=0$，第t年湖泊中污染物A的总量为m，浓度为m/V. 则在时间间隔$[t,t+\Delta t]$内，排入湖泊中A的量为$\frac{m_0}{V}\cdot\frac{V}{6}\mathrm{d}t=\frac{m_0}{6}\mathrm{d}t$，流出湖泊的水中含A的量为$\frac{m}{V}\cdot\frac{V}{3}\mathrm{d}t=\frac{m}{3}\mathrm{d}t$，因而在这一时间间隔内湖泊内污染物A的改变量为

$$\mathrm{d}m=\left(\frac{m_0}{6}-\frac{m}{3}\right)\mathrm{d}t.$$

分离变量后两端积分，得

$$m=\frac{m_0}{2}-C\mathrm{e}^{-t/3}.$$

代入$m(0)=5m_0$，得$C=-\frac{9}{2}m_0$，故

$$m=\frac{m_0}{2}(1+9\mathrm{e}^{-t/3}).$$

令$m=m_0$，得$t=6\ln 3$，即知至多经$6\ln 3$年，湖泊中污染物含量可降至m_0以内.

例13 由经济学知，市场上的商品价格的变化率与商品的过剩需求量(即需求量与供给量之差)成正比. 设某种商品的供给量Q_1与需求量Q_2都是价格P的线性函数

$$Q_1=-a+bP,\quad Q_2=c-dP,$$

其中a,b,c,d都是正常数，求该商品价格随时间变化的规律.

解 依题意建立微分方程

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}=k(Q_2-Q_1)=k[a+c-(d+b)P]\quad(k\text{ 为比例系数}),$$

即
$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}=-k(d+b)P+k(a+c).$$

通解
$$\begin{aligned}P&=\mathrm{e}^{-k(d+b)\int\mathrm{d}t}\left[\int k(a+c)\mathrm{e}^{k(d+b)\int\mathrm{d}t}\mathrm{d}t+C\right]\\&=\mathrm{e}^{-k(d+b)t}\left[\frac{a+c}{b+d}\mathrm{e}^{k(d+b)t}+C\right].\end{aligned}$$

知商品价格随时间变化的规律为

$$P(t)=\frac{a+c}{b+d}+Ce^{-k(b+d)t}.$$

例14 在某一人群中推广新技术是通过其中已掌握新技术的人进行的. 设该人群的总人数为N,在$t=0$时刻已掌握新技术的人数为x_0,在任意时刻t已掌握新技术的人数为$x(t)$(视作连续可微变量),其变化率与已掌握新技术人数和未掌握新技术人数之积成正比,比例常数$k>0$,求$x(t)$.

解 依题意有初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=kx(N-x),\\ x|_{t=0}=x_0.\end{cases}$$

分离变量后两端积分,得通解

$$x=NCe^{kNt}/(1+Ce^{kNt}).$$

代入$x(0)=x_0$,得$C=x_0/(N-x_0)$,故

$$x(t)=\frac{Nx_0e^{kNt}}{N-x_0+x_0e^{kNt}}.$$

例15 按照牛顿冷却定律,温度为T的物体在温度为T_0($T_0<T$)的环境中冷却的速度与温差$T-T_0$成正比. 试用该定律确定某人是否是下面案件的嫌疑人. 某地公安局于晚7:30发现一具女尸,晚8:20法医测得尸体温度为32.6 ℃,1 h后又测得尸体温度为31.4 ℃,假定室温一直为21.1 ℃. 由案情分析得知张某涉嫌犯罪,但张某矢口否认. 有证人说:"张某下午一直在办公室,下午5:00打了一个电话后才离开办公室."从办公室到凶杀现场步行需5 min. 问张某能否排除犯罪嫌疑?

解 若能推断凶杀案发生在5:05之前,则张某可以排除犯罪嫌疑. 否则,不能排除嫌疑.

设7:30为$t=0$,则由题设依牛顿冷却定律建立微分方程

$$\frac{dT}{dt}=-k(T-21.1),\quad T(50)=32.6,\quad T(110)=31.4.$$

分离变量后两端积分,得通解$T=Ce^{-kt}+21.1$.

由$T(50)=32.6$和$T(110)=31.4$，得

$$k=\frac{1}{60}\ln\frac{11.5}{10.3},\quad C=11.5e^{\frac{50}{60}\ln\frac{11.5}{10.3}},$$

故
$$T=11.5e^{\frac{50-t}{60}\ln\frac{11.5}{10.3}}+21.1.$$

设死者体温为37 ℃(死者体温越低，在5:05后被杀的可能性越大)，用上述方程求解

$$37=11.5e^{\frac{50-t}{60}\ln\frac{11.5}{10.3}}+21.1,$$

得
$$t=(50-60\times2.94)\ \mathrm{min}=-126.4\ \mathrm{min}.$$

故死者被杀时间为5:24左右，张某不能排除犯罪嫌疑.

例16 如图1.14所示，一个LH的电感与一个CF的电容串联，若在$t=0$时，$Q=Q_0$，$I=0$. 求在$t>0$时的电量Q和电流I.

解 因为经过L的电压降为$L\frac{dL}{dt}=L\frac{d^2Q}{dt^2}$，经过$C$的电压降为$\frac{Q}{C}$，则有

$$L\frac{d^2Q}{dt^2}+\frac{Q}{C}=0.$$



图1.14

又由$\frac{dQ}{dt}=I$，故上式化为

$$LI\frac{dI}{dQ}+\frac{Q}{C}=0\quad 或\quad LI\,dI+\frac{Q}{C}dQ=0.$$

分离变量后两端积分，得

$$\frac{1}{2}LI^2=-\frac{Q^2}{2C}+C_1\quad(C_1\text{为任意常数}).$$

由$I(Q_0)=0$，得$C_1=\frac{Q_0^2}{2C}$，于是

$$I=\frac{dQ}{dt}=\pm\frac{1}{\sqrt{LC}}\sqrt{Q_0^2-Q^2}.$$

再分离变量后两端积分，得

$$\arcsin\frac{Q}{Q_0}=\pm\frac{t}{\sqrt{LC}}+C_2.$$

由 $Q(0)=Q_0$，得 $C_2=\pi/2$，故有

$$\arcsin\frac{Q}{Q_0}=\frac{\pi}{2}\pm\frac{t}{\sqrt{LC}} \quad 或 \quad Q=Q_0\cos\frac{t}{\sqrt{LC}}.$$

所求的 Q 与 I 满足所给条件的表达式为

$$I=\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}=-\frac{Q_0}{\sqrt{LC}}\sin\frac{t}{\sqrt{LC}}.$$

第九节　几种可降阶的高阶方程

主要内容

1. 方程 $F(x,y^{(k)},y^{(k+1)},\cdots,y^{(n)})=0$. 只要令 $y^{(k)}=z$，即可化为 $F(x,z,z',\cdots,z^{(n-k)})=0$.

若解得 $z=z(x,C_1,C_2,\cdots,C_{n-k})$，则连续积分 k 次，即可求得 y.

2. 方程 $F(y,y',\cdots,y^{(n)})=0$，方程不显含自变量 x，则可令 $y'=p$，使方程降低一阶.

3. 方程 $F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0$ 的左端恰为某一函数 $\Phi(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)})$ 对 x 的导数，即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Phi(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)})=0$$

称为**恰当导数方程**. 可化为

$$\Phi(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)})=C$$

来求解.

疑难解析

1. 哪些微分方程可用积分法求解.

答　可用积分法求解的微分方程如下：

（1）形如$\frac{d^n y}{dx^n}=\varphi(x)$的微分方程，可用逐次积分法求解，其通解为

$$y=\underbrace{\int\int\cdots\int}_{n个}\varphi(x)dx+\frac{C_1 x^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{C_2 x^{n-2}}{(n-2)!}+\cdots+C_n.$$

（2）形如$f\left(\frac{d^n y}{dx^n},x\right)=0$ 的微分方程.

若能解出$\frac{d^n y}{dx^n}$，则可用逐次积分法求解.

若只能解出x，则将方程化为参数形式

$$\begin{cases}x=\varphi(t),\\ \frac{d^n y}{dx^n}=\psi(t)\end{cases}\Rightarrow d\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^n}\right)=\psi(t)\varphi'(t)dt,$$

则
$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}=\int\psi(t)\varphi'(t)dt+C_1=\psi_1(t,C_1).$$

类似地
$$\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}=\psi_2(t,C_1,C_2),$$
$$\vdots$$
$$y=\psi_n(t,C_1,C_2,\cdots,C_n),$$

即得微分方程的参数形式通解为

$$\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi_n(t,C_1,C_2,\cdots,C_n).\end{cases}$$

形如$f\left(\frac{d^n y}{dx^n},\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)=0$ 和 $f\left(\frac{d^n y}{dx^n},\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}\right)=0$ 型的微分方程，也可用积分求解，但讨论起来比较复杂，不予以介绍.

2. 在可降阶的微分方程中，常常要消去p，此时要注意些什么问题？

答 消去p 时，特别要注意是否会丢失使$p=0$ 的解. 例如$yy''+y'^2=0$ 是不显含x 的微分方程，令$y'=p$，则$y''=p\frac{dp}{dy}$，方程化为

$$yp\frac{dp}{dy}+p^2=0\Rightarrow y\frac{dp}{dy}=-p\ (p\neq0).$$

分离变量后两端积分，得

$$py=C_0 \Rightarrow y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=C_0 \Rightarrow y\mathrm{d}y=C_0x\mathrm{d}x.$$

通解为
$$y^2=C_0x^2+C_1.$$

在消去 p ($p\neq 0$)时，丢失了 $p=0$ 的解，即 $y=0$ 与 y 等于常数的解，要予以补充.

方法、技巧与典型例题分析

在求解微分方程的过程中，要熟悉各种微分公式与技巧，灵活地进行变形，善于区别各种不同类型的方程，恰当地运用方法，才能正确地求出解.

例 1 求解下列方程：

(1) $(1+x^2)y''+y'^2+1=0$； (2) $xy''+(x^2-1)(y'-1)=0$；

(3) $a^2y''^2=(1+y'^2)^3$； (4) $yy''-y'^2-y^2y'=0$.

解 (1) 令 $y'=z$，将方程化为

$$(1+x^2)\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+z^2+1=0,$$

即
$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+\frac{z^2+1}{1+x^2}=0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}z}{1+z^2}=-\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}.$$

两端积分，得
$$\arctan z+\arctan x=C_1,$$

即
$$\arctan\left(\frac{z+x}{1-zx}\right)=C_1 \Rightarrow z=\frac{\tan C_1-x}{1+x\tan C_1}=\frac{C_2-x}{1+xC_2}.$$

于是，通解

$$y=\int p\mathrm{d}x=\int\frac{C_2-x}{1+xC_2}\mathrm{d}x=\frac{1+C_2^2}{C_2^2}\ln(1+C_2x)-\frac{x}{C_2}+C_3.$$

(2) 将方程化为 $\dfrac{y''}{y'-1}+\dfrac{x^2-1}{x}=0$，令 $y'=z$，得

$$[\ln(z-1)]'=\frac{1-x^2}{x} \Rightarrow \ln(z-1)=\ln|x|-\frac{x^2}{2}+C.$$

故
$$y'=C_1xe^{-x^2/2}+1.$$

两端再积分一次，即得原方程通解

$$y=x^2+C\ln|x|+C_1.$$

(3) 将方程化为$ay''=[(1+y'^2)]^{3/2}$，令 $y'=p$，得

$$\frac{dp}{dx}=\frac{1}{a}(1+p^2)^{3/2}.$$

两端积分，得

$$x=\frac{ap}{\sqrt{1+p^2}}+C_1.$$

由 $dy=p\,dx$，得

$$dy=\frac{ap\,dp}{(1+p^2)^{3/2}},$$

再两端积分，得

$$y=-\frac{a}{(1+p^2)^{1/2}}+C_2.$$

于是，得原方程参数形式通解

$$\begin{cases} x=\dfrac{ap}{(1+p^2)^{1/2}}+C_1, \\ y=-\dfrac{a}{(1+p^2)^{1/2}}+C_2. \end{cases}$$

消去参数 p，得原方程通解

$$(x-C_1)^2+(y-C_2)^2=a^2.$$

(4) 方程是不显含 x 的二阶微分方程，化为

$$\frac{y''}{y}-\frac{y'^2}{y^2}-y'=0 \quad (y\neq 0).$$

令 $y'=P, y''=P\dfrac{dP}{dy}$，方程化为

$$\frac{dP}{dy}=\frac{P}{y}+y \Rightarrow \left(P\frac{1}{y}\right)'=1 \Rightarrow P=y^2+Cy,$$

即

$$\frac{dy}{dx}=y(y+C).$$

分离变量后两端积分，得原方程通解.

$$\ln\frac{y}{y+C}=Cx+C \Rightarrow y=\frac{Ce^{Cx+C_1}}{1-e^{Cx+C_1}}.$$

$y=0$ 也是原方程的解.

例 2 求解下列方程:

(1) $yy''+y'^2+1=0$; (2) $3y''^2-y'y'''=0$;

(3) $yy''-y'^2-6xy^2=0$; (4) $x^2yy''-x^2y'^2-4xyy'+8y^2=0$.

解 (1) 方程是不显含 y' 的二阶方程,化为

$$(yy')'=-1.$$

两端积分,得

$$yy'=-x+C_1 \Rightarrow \left(\frac{y^2}{2}\right)'=-x+C_1.$$

两端积分,得

$$\frac{y^2}{2}=-\frac{x^2}{2}+C_1x+C_2,$$

即原方程通解

$$y^2=-x^2+2C_1x+2C_2.$$

(2) 方程化为 $\dfrac{(y'')^2-y'y'''}{y''^2}=2$,即 $\left(\dfrac{y'}{y''}\right)'=-2$.

两端积分,得

$$\frac{y'}{y''}=-2x+C_1.$$

令 $y'=p$,化为

$$\frac{-2\mathrm{d}x}{-2x+C_1}=\frac{-2}{p}\mathrm{d}p.$$

两端积分,得
$$-2x+C_1=\frac{C_2}{p^2},$$

即
$$p=\pm\sqrt{\frac{C_2}{-2x+C_1}} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\pm\sqrt{\frac{C_2}{-2x+C_1}},$$

两端积分,得原方程通解

$$y=\mp\sqrt{C_2}\sqrt{-2x+C_1}+C_3.$$

由 $y''=0$ 知,$y=C_1x+C_2$ 也是原方程的解.

(3) 方程化为$\frac{yy''-(y')^2}{y^2}=6x$ ($y\neq 0$)，令$\frac{y'}{y}=z$，得

$$z'=6x.$$

两端积分，得

$$z=3x^2+C_1 \Rightarrow \frac{y'}{y}=3x^2+C_1.$$

分离变量后两端积分，得原方程通解

$$\ln|y|=x^3+C_1x+C_2.$$

$y=0$ 也是原方程的解.

(4) 方程化为$x^2\left(\frac{y'}{y}\right)'-4x\left(\frac{y'}{y}\right)+8=0$ ($y\neq 0$). 令$\frac{y'}{y}=z$，方程化为$x^2z'-4xz+8=0$，解出

$$z=Cx^4+\frac{8}{5x} \Rightarrow \frac{y'}{y}=Cx^4+\frac{8}{5x}.$$

分离变量后两端积分，得原方程通解

$$\ln|y|=C_1x^5+\frac{8}{5}\ln|x|+C_2.$$

$y=0$ 也是原方程的解.

例 3 求解方程 $x^2yy''-(y-xy')^2=0$.

解 方程左端是x,y',y''的二次齐式. 令$y=e^{\int z\mathrm{d}x}$，则$y'=e^{\int z\mathrm{d}x}z$，$y''=e^{\int z\mathrm{d}x}(z^2+z)$，代入原方程后消去因式$e^{\int z\mathrm{d}x}$，得方程

$$x^2(z'+z^2)=(1-xz)^2 \Rightarrow x^2z'+2xz-1=0.$$

解此一阶线性方程，得

$$z=\frac{C_1}{x^2}+\frac{1}{x},$$

即原方程通解 $\quad y=e^{\int\left(\frac{C_1}{x^2}+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x+C}=C_2xe^{-\frac{C_1}{x}}.$

例 4 求下列微分方程的通解：

(1) $x=e^{\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}}+\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$； (2) $a^3y'''y''=(1+b^2y''^2)^{1/2}$.

解 (1) 设 $\frac{d^2y}{dx^2}=t$，得 $x=e^t+t$，则 $dx=(e^t+1)dt$.

由 $d\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d^2y}{dx^2}dx=(te^t+t)dt \Rightarrow d\,\frac{dy}{dx}=(te^t+t)dt$.

两端积分，得
$$\frac{dy}{dx}=(t-1)e^t+\frac{1}{2}t^2+C_1.$$

又由
$$dy=\frac{dy}{dx}dx=\left[(t-1)e^t+\frac{1}{2}t^2+C_1\right](e^t+1)dt$$
$$=\left[(t-1)e^{2t}+\left(\frac{t^2}{2}+t-1+C_1\right)e^t+\frac{t^2}{2}+C_1\right]dt,$$

两端积分，得
$$y=\left(\frac{t}{2}-\frac{3}{4}\right)e^{2t}+\left(\frac{1}{2}t^2-1+C_1\right)e^t+\frac{1}{6}t^3+C_1t+C_2.$$

故原方程有参数形式的通解
$$\begin{cases}x=e^t+t,\\ y=\left(\frac{t}{2}-\frac{3}{4}\right)e^{2t}+\left(\frac{1}{2}t^2-1+C_1\right)e^t+\frac{1}{6}t^3+C_1t+C_2.\end{cases}$$

(2) 设 $y''=p$，得
$$a^3p\,\frac{dp}{dx}=\sqrt{1+b^2p^2}.$$

分离变量后两端积分，得
$$x=\frac{a^3}{b^2}(1+b^2p^2)^{1/2}\Rightarrow dx=\frac{a^3p\,dp}{\sqrt{1+b^2p^2}},$$

则
$$\frac{dy}{dx}=\int p\,dx=\int\frac{a^3p^2}{\sqrt{1+b^2p^2}}dp$$
$$=\frac{a^3}{b^2}\int\left[(1+b^2p^2)^{1/2}-(1+b^2p^2)^{-1/2}\right]dp$$
$$=\frac{a^3}{b^2}\left[\frac{bp}{2}(1+b^2p^2)^{1/2}+\ln(bp+(1+b^2p^2)^{1/2})\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}\ln(bp+(1+b^2p^2)^{1/2})\right]+C,$$

故
$$dy=\left\{\frac{a^6}{2b^3}\left[bp^2-\frac{p}{\sqrt{1+b^2p^2}}\ln(bp+\sqrt{1+b^2p^2})\right]\right.$$

$$+\frac{a^3C_1p}{\sqrt{1+b^2p^2}}\Big\}\mathrm{d}p.$$

两端积分，得

$$y=\frac{a^6}{2b^3}\left[\frac{b}{3}p^3-\frac{1}{b^2}\sqrt{1+b^2p^2}\ln(bp+\sqrt{1+b^2p^2})+\frac{p}{b^2}\right]$$

$$+\frac{a^3C_1}{b^2}\sqrt{1+b^2p^2}+C_2.$$

所以原方程有参数形式的通解

$$\begin{cases}x=\dfrac{a^3}{b^2}\sqrt{1+b^2p^2},\\ y=\dfrac{a^6}{6b^2}p^3+\dfrac{a^6}{2b^5}p+\dfrac{a^3C_1}{b^2}\sqrt{1+b^2p^2}\\ \qquad -\dfrac{a^6}{2b^5}\sqrt{1+b^2p^2}\ln(bp+\sqrt{1+b^2p^2})+C_2.\end{cases}$$

例 5 求解 $x^2yy''+(xy'-y)^2=0$.

解 设 $y=e^{\int z\mathrm{d}x}$，则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=ze^{\int z\mathrm{d}x},\quad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+z^2\right)e^{\int z\mathrm{d}x}.$$

原方程化为
$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}-\frac{2}{x}z+2z^2=-\frac{1}{x^2}.$$

设 $z=y_1+y_2$，$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x}$，则得

$$\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x}-\frac{2y_1}{x}-\frac{y_2}{x}+2y_1^2+4y_1y_2+2y_2^2=-\frac{2}{x^2}.$$

由于
$$\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x}-\frac{2y_1}{x}+2y_1^2=-\frac{2}{x^2},$$

则 $y_1=\frac{1}{x}$ 是其一解. 故有

$$\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x}+\frac{2}{x}y_2=-2y_2^2.$$

令 $u=\frac{1}{y_2}$，上式化为
$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}-\frac{2u}{x}=2,$$

解得 $$u=e^{2\int\frac{dx}{x}}\left[\int 2e^{-\int\frac{2dx}{x}}dx+C_1\right]=-2x+C_1x^2.$$

于是 $$y_2=\frac{1}{C_1x^2-2x}=-\frac{1}{2x}+\frac{1}{2(C_1x-2)},$$

从而 $$z=\frac{1}{x}-\frac{1}{2x}+\frac{1}{2(C_1x-2)},$$

所以,原方程通解为

$$y=e^{\int\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{2x}+\frac{1}{2(C_1x-2)}\right]dx+\ln C_2}=x^{1/2}(C_1x-2)^{1/2}C_2,$$

即 $$y^2=x(C_1x-2)C_2=C_1'x^2+C_2'x.$$

例 6 求解 $y\frac{d^2y}{dx^2}-\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=y^2\ln y.$

解 设 $\frac{dy}{dx}=p$,则 $\frac{d^2y}{dx^2}=p\frac{dp}{dy}$,方程化为

$$yp\frac{dp}{dy}-p^2=y^2\ln y \quad 或 \quad \frac{dp}{dy}-\frac{p}{y}=p^{-1}y\ln y.$$

设 $z=p^2$,则上式化为

$$\frac{dz}{dy}-\frac{2}{y}z=2y\mathrm{d}y,$$

是一阶线性方程,可求解

$$z=e^{\int\frac{2}{y}dy}\left[\int 2y\ln y e^{-\int\frac{2}{y}dy}dy+C_2\right]=y^2[(\ln y)^2+C_2],$$

即 $$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=y^2[(\ln y)^2+C_2].$$

两端开二次方根后分离变量,得

$$\frac{dy}{y\sqrt{(\ln y)^2+C_2}}=dx.$$

两端积分,得

$$\ln y+\sqrt{(\ln y)^2+C_2}=C_1e^x.$$

变换为

$$\sqrt{(\ln y)^2+C_2}=C_1e^x-\ln y \Rightarrow 2C_1e^x\ln y=C_1e^{2x}-C_2,$$

得原方程的通解

$$\ln y=C_1'e^{x}+C_2'e^{-x}.$$

例7 求解 $x(yy''+y'^2)+3yy'=2x^3$.

解 令$yy'=z$,方程化为$xz'+3z=2x^3$. 则对方程两端同乘x^2,化为

$$(x^3z)'=2x^5.$$

两端积分,得

$$z=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{x^3}C \Rightarrow yy'=\frac{1}{3}x^3+\frac{C}{x^3}.$$

分离变量后两端积分,得原方程通解

$$y^2=C_1x^{-2}+\frac{1}{6}x^4+C_2.$$

例8 求下列方程的解:

(1) $x\dfrac{d^2x}{dt^2}+\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2=0$;　　(2) $x\dfrac{d^2x}{dt^2}-\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2=0$.

解 (1) 方程化为$\dfrac{dxx'}{dt}=0$,是全微分方程,故有$xx'=C_1$,化为$xdx=C_1dt$.

两端积分,得原方程通解

$$x^2=C_1t+C_2.$$

(2) 方程不是全微分方程,乘以积分因子$\mu=\dfrac{1}{x^2}$ $(x\neq0)$,化为

$$\frac{1}{x}\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{1}{x^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=\frac{d\left(\frac{1}{x}\frac{dx}{dt}\right)}{dt}=0 \Rightarrow \frac{1}{x}\frac{dx}{dt}=C_1,$$

得原方程通解　　$x=C_2e^{C_1t}$.

$x=0$ 也是原方程的解.

例9 求解 $y^2(xdx+ydy)+x(ydx-xdy)=0$.

解 方程中因式

$$xdx+ydy=\frac{1}{2}d(x^2+y^2),\quad ydx-xdy=-x^2d\,\frac{y}{x}.$$

作极坐标代换

$$x=\rho\cos\theta,\quad y=\rho\sin\theta,$$

则 $$x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y=\rho\mathrm{d}\rho,\quad y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y=-\rho^2\mathrm{d}\theta.$$

原方程化为 $$\rho^3\sin^2\theta\mathrm{d}\rho-\rho^3\cos\theta\mathrm{d}\theta=0.$$

分离变量后两端积分，得

$$\rho+\frac{1}{\sin\theta}=C_1.$$

代回，得到

$$\sqrt{x^2+y^2}+\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{y}=C_1\quad(y\neq0),$$

得原方程通解

$$(x^2+y^2)(y+1)^2=Cy^2.$$

$y=0$ 也是原方程的解.

例 10 在 $x>0$ 平面上，曲线 $y=f(x)$ 上点 $(x,f(x))$ 处的切线在 y 轴上的截距等于 $\frac{1}{x}\int_0^x f(x)\mathrm{d}t$，求 $f(x)$ 的一般表达式.

解 曲线 $y=f(x)$ 上点 $(x,f(x))$ 处的切线方程为

$$Y-f(x)=f'(x)(X-x),$$

在 y 轴上的截距为 $Y=f(x)-xf'(x)$. 由题意，得

$$\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=f(x)-xf(x)\Rightarrow\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=xf(x)-x^2f(x).$$

两端对 x 求导，整理，得

$$xf''(x)+f'(x)=0\Rightarrow\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(xf'(x))=0.$$

两端积分，得

$$xf'(x)=C\Rightarrow f'(x)=\frac{C_1}{x},$$

故 $f(x)$ 的表达式为

$$f(x)=C_1\ln x+C_2.$$

例 11（追线问题） 在 Ox 轴上有一点 P 以常速度 a 沿着 Ox 轴

正向移动(如图1.15所示),在xOy平面上另有一点M以常速v运动,方向永远指向点P,求点M的运动轨迹.

解 设时刻t点P的横坐标为X,$t=0$时点P的横坐标为X_0,则依题意,有

$$\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2=v^2,\quad X=X_0+at,$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{y}{X-x}.$$

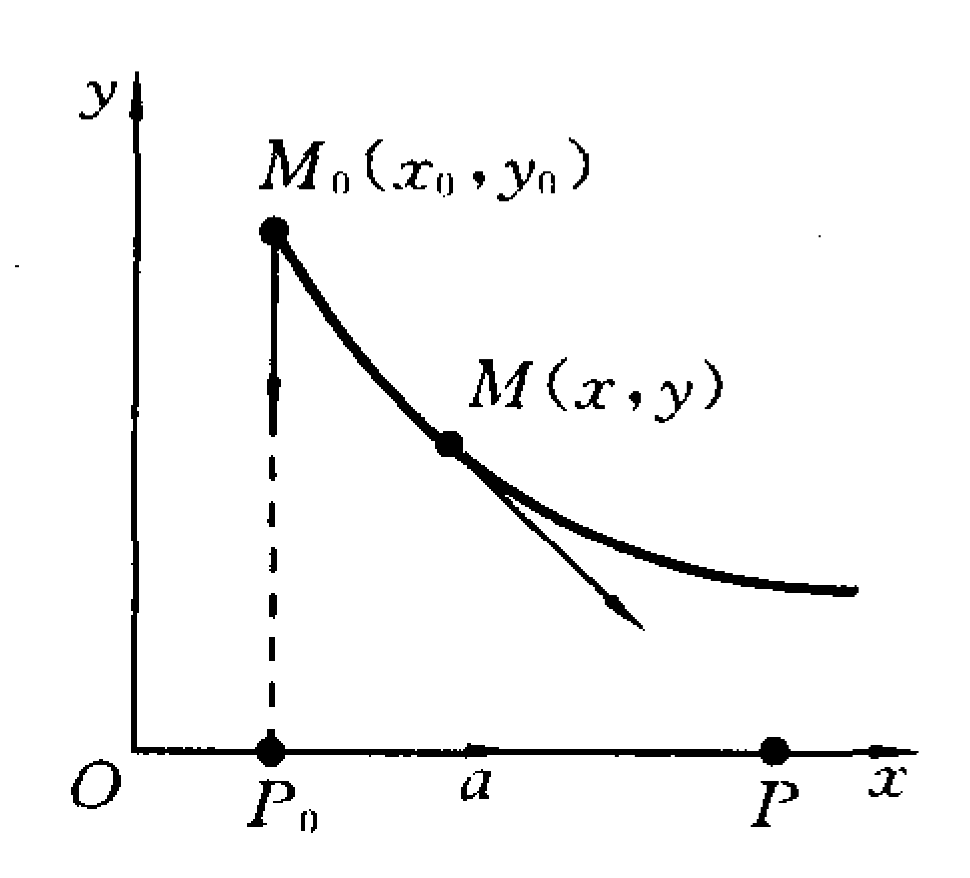


图1.15

令$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y'$,得

$$X_0-x+at=-\frac{y}{y'},$$

两端对x求导,得

$$-1+a\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{yy''-y'^2}{y'^2}, \tag{①}$$

即

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{yy''}{ay'^2}\Rightarrow\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{v}\sqrt{1+y'^2}. \tag{②}$$

由式①与式②得点M的追线方程

$$y''=\frac{ay'^2}{vy}\sqrt{1+y'^2}.$$

令$p=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$,则$y''=p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$,方程变为

$$p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=\frac{ap^2}{vy}\sqrt{1+p^2}\Rightarrow\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=\frac{ap}{vy}\sqrt{1+p^2},\quad p=0.$$

由$p=0$,得$y=0$,此时点M沿Ox轴移动.

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=\frac{ap}{vy}\sqrt{1+p^2}\Rightarrow\frac{\mathrm{d}p}{p\sqrt{1+p^2}}=\frac{a}{v}\frac{\mathrm{d}y}{y}.$$

因为$y>0$时$p<0$,所以,两端积分得

$$\ln\left(\frac{1}{p}+\sqrt{1+\left(\frac{1}{p}\right)^2}\right)=\frac{a}{v}(\ln y+\ln C),$$

即 $$\frac{1}{p}+\sqrt{1+\left(\frac{1}{p}\right)^2}=(Cy)^{a/v}.$$

设开始追逐时，点P 和点M 处于同一条平行y 轴的直线上（即 P_0 与 M_0），则$\frac{1}{p}=0$，得$C=\frac{1}{y_0}$，即

$$\frac{1}{p}+\sqrt{1+\left(\frac{1}{p}\right)^2}=\left(\frac{y}{y_0}\right)^{a/v}\Rightarrow -\frac{1}{p}+\sqrt{1+\left(\frac{1}{p}\right)^2}=\left(\frac{y}{y_0}\right)^{-a/v}.$$

将上述两式相减，得

$$\frac{2}{p}=\left(\frac{y}{y_0}\right)^{v/a}-\left(\frac{y}{y_0}\right)^{-v/a}\Rightarrow 2\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\left(\frac{y}{y_0}\right)^{a/v}-\left(\frac{y}{y_0}\right)^{-a/v}. \qquad ③$$

仅当$v>a$ 时，M 才有可能追上P. 对式③分离变量后两端积分，得追线方程

$$2x=\frac{y_0}{1+a/v}\left(\frac{y}{y_0}\right)^{1+a/v}-\frac{y_0}{1+a/v}\left(\frac{y}{y_0}\right)^{1-a/v}+C_1.$$

因为点M_0 在追线上，则由$y(x_0)=y_0$，得

$$C_1=2x_0+y_0\left(\frac{1}{1-a/v}-\frac{1}{1+a/v}\right),$$

故追线方程

$$x=\frac{y_0}{2(1+a/v)}\left[\left(\frac{y}{y_0}\right)^{1+a/v}-1\right]-\frac{y_0}{2(1-a/v)}\left[\left(\frac{y}{y_0}\right)^{1-a/v}-1\right]+x_0.$$

当$y=0$ 时，M 与P 相遇，相遇点坐标

$$x_1=x_0+\frac{ay_0}{v(1-v^2/a^2)}=x_0+\frac{avy_0}{v^2-a^2}.$$

追上所需时间是

$$T=\frac{x_1-x_0}{a}=\frac{vy_0}{v^2-a^2}.$$

例 12 设函数$y=y(x)$ $(x\geqslant 0)$二阶可导，且$y'(x)>0$，$y(0)=1$. 过曲线$y=y(x)$上任意一点$P(x,y)$作该曲线的切线及x 轴的垂线，上述两直线与x 轴所围成的三角形面积为S_1，区间$[0,x]$上以$y=y(x)$为曲边的曲边梯形面积为S_2，并设$2S_1-S_2$ 恒

为1，求此曲线 $y=y(x)$ 的方程.

解 曲线 $y=y(x)$ 上点 $P(x,y)$ 处的切线方程为

$$Y-y=y'(x)(X-x).$$

它在 x 轴上的截距为 $x-\frac{y}{y'}$，因为 $y'(x)>0, y(0)=1$，所以 $y(x)>0$. 于是

$$S_1=\frac{1}{2}y\left|y-\left(x-\frac{y}{y'}\right)\right|=\frac{y}{2y'}.$$

又 $S_2=\int_0^x y(t)\mathrm{d}t$，故由 $2S_1-S_2\equiv1$，得

$$\frac{y}{y'}-\int_0^x y(t)\mathrm{d}t=1.$$

两端对 x 求导，得二阶微分方程

$$yy''=y'^2.$$

令 $y'=p$，则 $y''=p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$，方程化为

$$yp\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=p^2\Rightarrow\frac{\mathrm{d}p}{p}=\frac{\mathrm{d}y}{y}.$$

两端积分，得

$$y'=p=C_1y\Rightarrow\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=C_1y,$$

即

$$y=\mathrm{e}^{C_1x+C_2}.$$

代入初始条件 $y'(0)=1, y(0)=1$，解得 $C_1=1, C_2=0$. 故所求曲线方程为 $y=\mathrm{e}^x$.

第二章　基 本 定 理

本章在上一章第六节关于一阶微分方程初值问题$\frac{dy}{dx}=f(x,y)$，$y(x_0)=y_0$解的存在性与唯一性讨论的基础上进一步讨论，并对解的延展，解对初值的连续依赖性与可微值进行了研究．读者应充分理解解定理，学会应用定理分析与说明一些问题．

第一节　解的存在性与唯一性定理

主 要 内 容

1．**定理 2.1**　如果初值问题

$$\begin{cases}\frac{dy}{dx}=f(x,y),\\ y(x_0)=y_0,\end{cases} \qquad ①$$

式①中函数$f(x,y)$在闭矩形域

$$R: x_0-a\leqslant x\leqslant x_0+a,\quad y_0-b\leqslant y\leqslant y_0+b$$

上满足如下条件：

(1) 在R上连续；

(2) 在R上关于变量y满足李普希兹(Lipschitz)条件，即存在常数N，使对于R上任何一对点(x,y)和$(x,\bar{y})$，均有不等式

$$|f(x,y)-f(x,\bar{y})|\leqslant N|y-\bar{y}|,$$

则初值问题①在区间$x_0-h_0\leqslant x\leqslant x_0+h_0$上存在唯一解

$$y=\varphi(x),\quad \varphi(x_0)=y_0.$$

这里$h_0=\min\left(a,\dfrac{b}{M}\right)$，而$M=\max\limits_{(x,y)\in R}|f(x,y)|$.

推论2.1 如果在区域R：$|x-x_0|\leqslant a$，$|y-y_0|\leqslant b$上有：

(1) $f(x,y)$在R上连续；(2) $f'_y(x,y)$在R上有界，则初值问题在x_0的某邻域内存在唯一解.

推论2.2 如果(1)$f(x,y)$在D内连续；(2)$f'_y(x,y)$在区域D内有界或连续，则对任意$(x_0,y_0)\in D$，初值问题的解存在且唯一.

2. 对隐方程的初值问题$F(x,y,y')=0$，$y(x_0)=y_0$. 因为隐方程$F(x,y,y')=0$可能得到几个显方程$y'=f_i(x,y)$，$i=1,2,\cdots,k$. 如果每个初值问题$y'=f_i(x,y)$，$y(x_0)=y_0$，$i=1,2,\cdots,k$都有唯一解，此时初值问题有k个解满足方程，不能理解为多于一条积分曲线通过某个(x,y)就破坏了解的唯一性，而应理解为每一个显方程有唯一解满足$y(x_0)=y_0$是唯一性.

疑难解析

1. 怎样保证李普希兹条件成立？

答 在实际问题中，验证李普希兹条件成立是比较困难的，但存在保证李普希兹条件成立的充分条件，而且较易于验证.

如果$f(x,y)$在R上存在有界的偏导数$f'_y(x,y)$，则$f(x,y)$在R上必满足对于y的李普希兹条件. 因为，对R上两点(x,y_1)，$(x,\bar{y})$，由拉格朗日中值定理，有

$$|f(x,y)-f(x,\bar{y})|=|f'_y(x,\xi)|\,|y-\bar{y}|\leqslant N(y-\bar{y}),$$

其中，$y<\xi<\bar{y}$，从而$(x,\xi)\in R$. 若$f'_y(x,y)$在R上连续，它在R上必满足李普希兹条件.

但是，满足李普希兹条件的函数不一定存在有界偏导数$f'_y(x,y)$. 例如，函数$f(x,y)=|y|$满足李普希兹条件，有

$$|f(x,y)-f(x,\bar{y})|=||y|-|\bar{y}||\leqslant|y-\bar{y}|.$$

但$f(x,y)=|y|$在$y=0$处不存在对y的偏导数.

所以，上面的条件是充分的，不是等价的.

2. 怎样使用毕卡(Picard)逐次逼近法？

答 首先，设$f(x,y)$在R上满足李普希兹条件.

然后取$\varphi_0(x)=y_0$作积分方程$y=y_0+\int_{x_0}^{x}f(x,y)\mathrm{d}x$的零次近似解.

再取$\varphi_1(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(\xi,y_0)\mathrm{d}\xi$作积分方程的一次近似解.

再取$\varphi_2(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(\xi,\varphi_1(\xi))\mathrm{d}\xi$作积分方程的二次近似解.
如此继续，得n次近似解

$$\varphi_n(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(\xi,\varphi_{n-1}(\xi))\mathrm{d}\xi.$$

由归纳法可以求得

$$|\varphi(x)-\varphi_n(x)|\leqslant\frac{MN^n}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1}.$$

当$|x-x_0|$充分小而n充分大时，$\varphi_n(x)$可以任意近似于解$\varphi(x)$.

由于n越大近似程度越好，所以这个方法称为逐次逼近法.

方法、技巧与典型例题分析

本节要求深刻地理解定理，特别是定理的条件与结论，正确地利用定理解决具体问题.

例1 判断方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x\tan y$在区域

(1) R_1: $-1\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant\pi$;

(2) R_2: $-1\leqslant x\leqslant 1, -\frac{\pi}{4}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{4}$

上是否满足定理2.1的条件.

解 (1) 在区域R_1上，函数$f(x,y)=x\tan y$在$y=\pi/2$时不连续，所以不满足定理2.1的条件.

（2）在区域 R_2 上，函数 $f(x,y)=x\tan y$ 连续，且 $|f'_y(x,y)|=\left|\frac{x}{\cos^2 y}\right|\leqslant 2$，即 $f(x,y)$ 对 y 的偏导数有界，从而李普希兹条件成立，故满足定理2.1的条件.

例2 判断下列方程在什么样的区域上保证初值解存在且唯一：

（1）$y'=x^2+y^2$；（2）$y'=x+\sin y$；

（3）$y'=x^{-1/3}$；（4）$y'=\sqrt{|y|}$.

解 （1）$f(x,y)=x^2+y^2$ 在全平面连续，$f'_y(x,y)=2y$ 也在全平面连续，所以方程 $y'=x^2+y^2$ 在全平面上保证初值解存在且唯一.

（2）$f(x,y)=x+\sin y$ 及 $f'_y(x,y)=\cos y$ 在全平面连续，所以方程 $y'=x+\sin y$ 在全平面上保证初值解存在且唯一.

（3）除 y 轴（$x=0$）外，$f(x,y)=x^{-1/3}$ 在全平面连续，且 $f'_y(x,y)=0$ 在全平面有界，所以方程 $y'=x^{-1/3}$ 在除 y 轴外的全平面上保证初值解存在且唯一.

（4）因为 $f(x,y)=\sqrt{|y|}=\begin{cases}\sqrt{y}, & y\geqslant 0,\\ \sqrt{-y}, & y<0,\end{cases}$

故 $f(x,y)$ 在全平面连续. 而

$$f'(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{y}}, & y>0,\\[2ex] \dfrac{-1}{2\sqrt{-y}}, & y<0\end{cases}$$

在除 x 轴（$y=0$）外的全平面连续，所以在除去 x 轴外的全平面上初值解存在且唯一.

例3 讨论方程 $\frac{dy}{dx}=\frac{3}{2}y^{1/3}$ 在怎样的区域中满足定理2.1的条件，并求通过点(0,0)的一切解.

解 因为 $f'_y(x,y)=\frac{1}{2}y^{-2/3}$ 在 x 轴上不连续，但在除 x 轴外的

有界闭区域上有界，故在这个区域上解存在且唯一.

在通过 x 轴上的点($y=0$)时需要进行讨论.

将方程分离变量后两端积分，得

$$\frac{3}{2}y^{2/3}=\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}C \Rightarrow y=\pm(x-C)^{3/2} \quad (x-C\geqslant 0).$$

此外，$y=0$ 也是原方程的解. 故过点(0,0)有无穷多解.

例 4 下列方程是否有奇解，在有奇解时求出奇解：

(1) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\sqrt{|y|}$；　　(2) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-x\pm\sqrt{x^2+2y}$.

解 (1) 由例 2(4)知，$y=0$ 时，解不唯一. 但 $y=0$ 是方程的解，所以 $y=0$ 是奇解.

(2) $f(x,y)=-x\pm\sqrt{x^2+2y}$ 在全平面连续，$f_y(x,y)=\pm\frac{1}{\sqrt{x^2+y}}$ 在 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 时不连续，解的唯一性不确定，所以可能是奇解.

当 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 时，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-x$，所以 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 是原方程的解，故 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 是奇解.

例 5 证明：函数 $f(x,y)=xy^2$.

(1) 在任一矩形 $R_1: a\leqslant x\leqslant b, c\leqslant y\leqslant d$ 上关于 y 满足李普希兹条件；

(2) 在任一条形 $R_2: a\leqslant x\leqslant b, |y|<+\infty$ 上关于 y 不满足李普希兹条件.

证 (1) 因为

$$|f(x,y)-f(x,\bar{y})|=|xy^2-x\bar{y}^2|=|x||y+\bar{y}||y-\bar{y}|,$$

而 (x,y) 及 $(x,\bar{y})\in R_1$，所以若令

$$k_1=\max(|a|,|b|), \quad k_2=\max(|c|,|d|),$$

则 $$|x||y+\bar{y}|\leqslant|x|(|y|+|\bar{y}|)\leqslant k_1 2k_2=k,$$

故 $$|f(x,y)-f(x,\bar{y})|\leqslant k|y-\bar{y}|, \quad ①$$

即在 R_1 上存在常数 k，使得对于 R_1 上点 (x,y) 及 $(x,\bar{y})$，有式①成立，所以，$f(x,y)=xy^2$ 在 R_1 上满足李普希兹条件.

(2) 在条形 R_2 上，$|x||y+\bar{y}|$ 可以是充分大的数. 因此，在条件 R_2 上，不存在常数 k，使得

$$|f(x,y)-f(x,\bar{y})|\leqslant k|y-\bar{y}|$$

成立. 所以，$f(x,y)=xy^2$ 在 R_2 上不满足李普希兹条件.

例 6 确定方程 $\frac{dy}{dx}=y|y|$，$y(x_0)=y_0$，初值问题解存在且唯一的点 (x_0,y_0) 的范围.

解 $f(x,y)=y|y|$ 在全平面上连续，

$$f(x,y)=y|y|=\begin{cases} y^2, & y>0, \\ -y^2, & y<0, \end{cases}$$

于是

$$f'_y(x,y)=\begin{cases} 2y, & y>0, \\ -2y, & y<0. \end{cases}$$

在 x 轴 $(y=0)$ 上，对任一点 $(x,0)$，由定义

$$f'_y(x,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,\Delta y)-f(x,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{1}{\Delta y}(\Delta y|\Delta y|-0)$$

$$=\lim_{\Delta y\to 0}|\Delta y|=0,$$

故知在全平面上有

$$f'_y(x,y)=\begin{cases} 2y, & y>0, \\ 0, & y=0, \\ -2y, & y<0. \end{cases}$$

所以，$f_y(x,y)$ 在全平面上连续.

由 $f(x,y)$ 与 $f'_y(x,y)$ 在全平面上连续知，$f(x,y)$ 必满足李普希兹条件，故已知方程过全平面上每一点 (x_0,y_0) 均有一条且只有一条积分曲线通过，即满足解的存在唯一性的点 (x_0,y_0) 的范围是全平面.

例 7 用逐次逼近法求方程 $\frac{dy}{dx}=x-y^2$ 满足初值条件 $\varphi(0)=0$ 的近似解：$\varphi_0(x)$，$\varphi_1(x)$，$\varphi_2(x)$，$\varphi_3(x)$.

解 由 $\varphi(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(\xi,y)\mathrm{d}\xi$ 知

$$\varphi_0(x)=\varphi(0)=0,$$

$$\varphi_1(x)=0+\int_0^x(\xi-0)\mathrm{d}\xi=\frac{1}{2}x^2,$$

$$\varphi_2(x)=0+\int_0^x\left[\xi-\left(\frac{1}{2}\xi^2\right)^2\right]\mathrm{d}\xi=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{20}x^5,$$

$$\varphi_3(x)=0+\int_0^x\left[\xi-\left(\frac{1}{2}\xi^2-\frac{1}{20}\xi^5\right)^2\right]\mathrm{d}\xi$$

$$=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{20}x^5+\frac{1}{160}x^8-\frac{1}{4400}x^{11}.$$

例8 用逐次逼近法求方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y^2-x^2$ 适合初值条件 $y(0)=1$ 的近似解：$\varphi_0(x),\varphi_1(x),\varphi_2(x)$.

解 与例7一样，求得

$$\varphi_0(x)=y(0)=1,$$

$$\varphi_1(x)=1+\int_0^x(1^2-\xi^2)\mathrm{d}\xi=1+x-\frac{x^3}{3},$$

$$\varphi_2(x)=1+\int_0^x\left[\left(1+\xi-\frac{1}{3}\xi^3\right)^2-\xi^2\right]\mathrm{d}\xi$$

$$=1+x+x^2-\frac{1}{6}x^4-\frac{2}{15}x^5+\frac{1}{63}x^7.$$

例9 证明：解的存在唯一性定理中的 n 次近似解 $\varphi_n(x)$ 与精确解 $\varphi(x)$ 有如下的误差估计式：

$$|\varphi_n(x)-\varphi(x)|\leqslant\frac{MN^n}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1}.$$

证 由 $\varphi(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(\xi,\varphi(\xi))\mathrm{d}\xi$ 与迭代序列

$$\varphi_0(x)=y_0,\quad \varphi_n(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(\xi,\varphi_{n-1}(\xi))\mathrm{d}\xi,\quad n=1,2,\cdots$$

得 $$|\varphi(x)-\varphi_0(x)|\leqslant\left|\int_{x_0}^{x}|f(\xi,\varphi(\xi))|\mathrm{d}\xi\right|\leqslant M|x-x_0|.$$

设 $$|\varphi(x)-\varphi_k(x)|\leqslant\frac{MN^k}{(k+1)!}|x-x_0|^{k+1},$$

则 $$|\varphi(x)-\varphi_{k+1}(x)|\leqslant\left|\int_{x_0}^{x}|f(\xi,\varphi(\xi))-f(\xi,\varphi_k(\xi))|\mathrm{d}\xi\right|$$
$$\leqslant\frac{MN^{k+1}}{(k+2)!}\left|\int_{x_0}^{x}|\xi-x_0|^{k+1}\mathrm{d}\xi\right|$$
$$\leqslant\frac{MN^{k+1}}{(k+2)!}|x-x_0|^{k+2}.$$

由数学归纳法知，对任意 n 次近似解，估计式成立.

例10 讨论方程 $y'^2-(x+y)y'+xy=0$ 的初值问题的解的唯一性.

解 由方程 $y'^2-(x+y)y'+xy=0$，可解出两个方程 $y'=x$，$y'=y$. 其中每个方程对于全平面上任意点 (x_0,y_0) 都满足定理2.1的条件，所以，方程的解存在且唯一，从而原方程在全平面上的解也是唯一的. 由于 $y'=x$ 和 $y'=y$ 的通解分别为

$$y=\frac{1}{2}x^2+C \quad 和 \quad y=Ce^x,$$

故对于任意点 (x_0,y_0)，原方程均有两条积分曲线

$$y=y_0+\frac{1}{2}(x^2-x_0^2), \quad y=y_0e^{x-x_0}$$

经过.

例11 设方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ 中的 $p(x)$ 和 $q(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $q(x)<0$，证明：对方程的任一非零解 $y=y(x)$，函数 $f(x)=e^{\int_{x_0}^{x}p(\xi)\mathrm{d}\xi}y(x)$，$y'(x)$ 单调递增，其中 $x_0\in[a,b]$.

证 只需证明 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上大于零. 因为

$$f'(x)=p(x)e^{\int_{x_0}^{x}p(\xi)\mathrm{d}\xi}y(x)y'(x)+[y'(x)]^2e^{\int_{x_0}^{x}p(\xi)\mathrm{d}\xi}$$
$$+y(x)y''(x)e^{\int_{x_0}^{x}p(\xi)\mathrm{d}\xi}$$
$$=e^{\int_{x_0}^{x}p(\xi)\mathrm{d}\xi}\{p(x)y(x)y'(x)+[y'(x)]^2+y(x)y''(x)\}.$$

由 $y=y(x)$ 是 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ 的非零解，则有

$$y''(x)=-[p(x)y'(x)+q(x)y(x)],$$

从而 $$f'(x)=e^{\int_{x_0}^{x}p(\xi)\mathrm{d}\xi}\{p(x)y(x)y'(x)+[y'(x)]^2$$
$$-p(x)y(x)y'(x)-q(x)y^2(x)\}$$

$$=e^{\int_{x_0}^{x}p(\xi)d\xi}\{[y'(x)]^2-q(x)y^2(x)\}$$
$$\geqslant 0\quad (q(x)<0).$$

又因为 $p(x)$，$q(x)$ 连续，所以方程满足定理 2.1 条件. 从而，$\forall x\in[a,b]$，$y(x)=0$ 与 $y'(x)=0$ 不能同时成立. 故在 $[a,b]$ 上，

$$[y'(x)]^2-q(x)y^2(x)>0 \Rightarrow f'(x)>0.$$

于是，知 $f(x)=e^{\int_{x_0}^{x}p(\xi)d\xi}y(x)y'(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上严格单调递增.

例 12 在条形区域 $a\leqslant x\leqslant b$，$|y|<+\infty$ 内，假设方程 $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ 的所有解都唯一，对其中任意两个解 $y_1(x)$，$y_2(x)$，如果有 $y_1(x_0)<y_2(x_0)$，则必有 $y_1(x)<y_2(x)$，$x_0\leqslant x\leqslant b$.

证 设 $\varphi(x)=y_1(x)-y_2(x)$，因为 $y_1(x_0)<y_2(x_0)$，所以有

$$\varphi(x_0)=y_1(x_0)-y_2(x_0)<0.$$

用反证法. 若 $y_1(x)<y_2(x)$ 不成立，则在 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 存在的同一区间上，由 $\varphi(x)$ 的连续性，必存在点 x'，使得 $\varphi(x')=0$，从而

$$y_1(x')-y_2(x')=0 \Rightarrow y_1(x')=y_2(x'),$$

这与解唯一存在相矛盾. 故必有

$$y_1(x)<y_2(x),\quad x_0\leqslant x\leqslant b.$$

例 13(隐函数定理) 设函数 $f(x,y)$ 在条形域 R：$a\leqslant x\leqslant b$，$|y|<+\infty$ 上连续，$f'_y(x,y)$ 处处存在，且满足关系式 $0<m\leqslant f'_y(x,y)\leqslant M$，试用逐步逼近法证明方程 $f(x,y)=0$ 在 $a\leqslant x\leqslant b$ 上有且只有一个连续解.

证 先证存在性. 作方程 $y=y-\frac{1}{2M}f(x,y)$，设 $(x_0,y_0)\in G$ 且 $f(x_0,y_0)=0$.

$\varphi_0(x)=y_0$，

$\varphi_1(x)=\varphi_0(x)-\frac{f(x,\varphi_0(x))}{2M}$，是一次近似.

$\varphi_2(x)=\varphi_1(x)-\frac{f(x,\varphi_1(x))}{2M}$，是二次近似.

$\vdots$

$$\varphi_n(x)=\varphi_{n-1}(x)-\frac{f(x,\varphi_{n-1}(x))}{2M}$$，是 n 次近似（$n=1,2,\cdots$）.

因为 $$|\varphi_1(x)-\varphi_0(x)|=\frac{|f(x,\varphi_0(x))|}{2M}\leqslant\frac{N}{2M},$$

$$N=\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x,\varphi_0(x))|,$$

$$|\varphi_2(x)-\varphi_1(x)|=|\varphi_1-\varphi_0|\left|1-\frac{f_y'(x,\tilde{\varphi}_0(x))}{2M}\right|$$

$$\leqslant|\varphi_1-\varphi_0|\left|1-\frac{m}{2M}\right|\leqslant\frac{N}{2M}\left(1-\frac{m}{2M}\right).$$

式中，$\tilde{\varphi}_0$ 为 φ_1 与 φ_0 之间某一 x 的函数. 一般地，有

$$|\varphi_n(x)-\varphi_{n-1}(x)|\leqslant|\varphi_{n-1}-\varphi_{n-2}|\cdot\left|1-\frac{m}{2M}\right|$$

$$\leqslant\frac{N}{2M}\left(1-\frac{m}{2M}\right)^{n-1}.$$

于是，级数

$$\varphi_0+(\varphi_1-\varphi_0)+(\varphi_2-\varphi_1)+\cdots+(\varphi_n-\varphi_{n-1})+\cdots$$

在$[a,b]$上存在收敛的优级数

$$y_0+\frac{N}{2M}+\frac{N}{2M}\left(1-\frac{m}{2M}\right)+\frac{N}{2M}\left(1-\frac{m}{2M}\right)^2+\cdots$$
$$+\frac{N}{2M}\left(1-\frac{m}{2M}\right)^{n-1}+\cdots,$$

所以，序列$\{\varphi_n\}$在$[a,b]$上一致收敛，设极限函数为 $\varphi(x)$，则由 $f(x,y)$在G 上连续，有

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)=\lim_{n\to\infty}\left(\varphi_{n-1}(x)-\frac{f(x,\varphi_{n-1}(x))}{2M}\right),$$

即 $$\varphi(x)=\varphi(x)-\frac{f(x,\varphi(x))}{2M},$$

所以 $$f(x,\varphi(x))=0.$$

这表明 $\varphi(x)$为原方程的解. 由 $\varphi_n(x)=y_0$，推出 $\varphi(x_0)=y_0$.

再用反证法证唯一性.

若方程在$[a,b]$上存在两个满足初始条件 $\varphi(x_0)=y_0$ 的解 $\varphi^{(1)}(x)$，$\varphi^{(2)}(x)$，则 $f(x,\varphi^{(1)}(x))-f(x,\varphi^{(2)}(x))=0$. 另一方面，由

中值定理

$$f(x,\varphi^{(1)}(x))-f(x,\varphi^{(2)}(x))=f'_y(x,\tilde{\varphi}(x))(\varphi^{(1)}(x)-\varphi^{(2)}(x)),$$

其中$\tilde{\varphi}(x)$是介于$\varphi^{(1)}(x)$与$\varphi^{(2)}(x)$之间某一x的函数. 由于$0<m\leqslant f'_y(x,y)\leqslant M$,所以

$$\varphi^{(1)}(x)-\varphi^{(2)}(x)\equiv 0.$$

例 14 设$f(x,y)$在矩形域$R:0\leqslant x\leqslant a,|y|<b$上连续,且当$y_1\leqslant y_2$时,$f(x,y_1)\leqslant f(x,y_2)$. 而对于$[0,a]$中所有的$x$,$f(x,0)\geqslant 0$. 试用逐步逼近法证明:在区间$0\leqslant x\leqslant h=\min\left(a,\dfrac{b}{M}\right)$上,初值问题

$$y'=f(x,y),\quad y(0)=0$$

的解是存在的,其中$M=\max\limits_{(x,y)\in R}|f(x,y)|$.

证 初值问题化为等价的积分方程

$$y(x)=\int_0^x f(x,y)\mathrm{d}x.$$

作毕卡序列

$$y_0=0,\ \ y_1=\int_0^x f(x,0)\mathrm{d}x,\ \ \cdots,\ \ y_n=\int_0^x f(x,y_{n-1}(x))\mathrm{d}x,\ \ \cdots.$$

当$n=0,1$时,有$|y_0|=0\leqslant b$,$|y_1|\leqslant\int_0^x|f(x,0)|\mathrm{d}x\leqslant Mh\leqslant b$.
由数学归纳法可知,对一切n,有

$$|y_n|<\int_0^x|f(x,y_{n-1})|\mathrm{d}x\leqslant Mh\leqslant b,$$

所以,毕卡序列一致有界且不超越R.

由于$y_0,y_1,\cdots,y_n,\cdots$都在$R$内,由题意

$$y_1=\int_0^x f(x,0)\mathrm{d}x\geqslant 0=y_0,$$

$$y_2-y_1=\int_0^x[f(x,y_1)-f(x,0)]\mathrm{d}x\geqslant 0,\cdots,$$

故
$$y_{n+1}-y_n=\int_0^x[f(x,y_n)-f(x,y_{n-1})]\mathrm{d}x\geqslant 0,$$

从而 $$y_0 \leqslant y_1 \leqslant y_2 \leqslant \cdots \leqslant y_n \leqslant \cdots.$$
因为单调有界序列必有极限，所以毕卡序列收敛，且
$$\lim_{n\to\infty} y_n(x) = y(x).$$
因为 $$y(x) = \lim_{n\to\infty} y_n(x) = \lim_{n\to\infty}\int_0^x f(x, y_{n-1}(x))\mathrm{d}x,$$
$$|y(x) - y(x_0)| = \left|\lim_{n\to\infty}\left[\int_0^x f(t, y_{n-1}(t))\mathrm{d}t - \int_0^{x_0} f(t, y_{n-1}(t))\mathrm{d}t\right]\right|$$
$$\leqslant \lim_{n\to\infty}\int_{x_0}^x |f(t, y_{n-1}(t))|\mathrm{d}t \leqslant \lim_{n\to\infty} M|x - x_0|$$
$$= M|x - x_0|,$$
当 $|x - x_0| < \delta$ 时，有 $|y(x) - y(x_0)| < \varepsilon$，所以，$y(x)$在点 x_0 连续. 由 x_0 的任意性知，在$[0, h]$上 $y(x)$是连续函数，故毕卡序列是一致收敛序列.

由毕卡序列的一致收敛性及$f(x, y)$在R 上的一致连续性知，$f(x, y_n(x))$在区间$0 \leqslant x \leqslant h$ 上一致收敛于$f(x, y(x))$. 从而，可以在积分号下取极限，得出
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^x f(x, y_{n-1}(x))\mathrm{d}x = \int_0^x f(x, y(x))\mathrm{d}x,$$
$$y(x) = \lim_{n\to\infty} y_n(x) = \lim_{n\to\infty}\int_0^x f(x, y_{n-1}(x))\mathrm{d}x = \int_0^x f(x, y(x))\mathrm{d}x.$$
此式说明，$y(x)$满足积分方程，因而是初值问题的解.

例15 设$y = y(x)$是$y' = h(x)g(y)$满足初始条件$y(0) = y_0$ 的解，其中$h(x)$在 $0 \leqslant x \leqslant a$ 上连续，$g(y)$在$-\infty < y < \infty$上连续，且$h(x) > 0$，$g(y) > 0$. 令$H(x) = \int_0^x h(t)\mathrm{d}t$，设对于任何$\xi$，积分$G(\xi) = \int_\xi^\infty \frac{1}{g(t)}\mathrm{d}t$ 恒存在. 求证：

(1) 如果$G(y_0) > H(a)$，则 $y(x)$在 $0 \leqslant x \leqslant a$ 上有定义；

(2) 如果$G(y_0) \leqslant H(a)$，则 $y(x)$在 $0 \leqslant x \leqslant H^{-1}(G(y_0))$上有定义.

证 将方程分离变量后两端积分，得

$$\int_{y_0}^{y(x)}\frac{\mathrm{d}y}{g(y)}=\int_0^x h(t)\mathrm{d}t \quad 或 \quad G(y_0)-G(y(x))=H(x).$$

因为，当 $0\leqslant x$ 时，$h(x)>0$，所以，$H(x)$ 单调增加. 又因为 $g(y)>0$，所以，$G(\xi)$ 单调减少而有 $G(\xi)>0$.

(1) 若 $G(y_0)>H(a)$，则由 $G(y_0)-G(y(x))=H(x)$ 有 $G(y(a))>0$，即知 $G(y(x))$ 在 $0\leqslant x\leqslant a$ 上有定义，所以，$y(x)$ 在 $0\leqslant x\leqslant a$ 上有定义；

(2) 若 $G(y_0)\leqslant H(a)$，则有 $G(y(a))\leqslant 0$. 但由于 $G(\xi)>0$，所以，$y(a)$ 不存在(因为在上面的不等式中，等号成立时，$y(a)=\infty$)，则 $y=y(x)$ 必须在 $0\leqslant x<b\leqslant a$ 上有定义. 由于 $x=b$ 满足 $G(y_0)=H(b)$，而 $b=H^{-1}(G(y_0))$，所以，$y=y(x)$ 在 $0\leqslant x<H^{-1}(G(y_0))$ 上有定义.

例16 设方程 $y'=f(x,y)$ 的右端函数 $f(x,y)$ 在整个 (x,y) 平面上连续可微，且 $f(x,y_0)=0$. 证明：若方程的非常数解 $y=\varphi(x)$ 当 $x\to x_0$ 时趋于 y_0，则 $x=\infty$ 或 $x_0=-\infty$.

证 因为 $f(x,y)$ 在全平面连续可微，所以满足定理条件，方程适合初始条件的解是唯一的.

用反证法证明：若 $x_0\neq\infty$ 或 $x_0\neq-\infty$，且 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=y_0=\varphi(x_0)$，则方程有非常数解 $y=\varphi(x)$ 适合初始条件 $\varphi(x_0)=y_0$；另一方面，由 $f(x,y_0)=0$ 可知，方程还有一个适合同一初始条件的常数解 $y=y_0$，这与唯一性矛盾. 故 $x=\infty$ 或 $x=-\infty$.

例17 设函数 $f(x,y)$ 在 xOy 平面区域 D 上连续，且对 y 单调非增，则方程 $y'=f(x,y)$ 在 D 上的右行解恒由初值唯一确定.

证 用反证法. 设方程 $y'=f(x,y)$ 在区间 $[x_0,x_1]$ $(x_0<x_1)$ 存在两个解 $\varphi_1(x)$，$\varphi_2(x)$. 不妨设 $\varphi_1(x_0)=\varphi_2(x_0)$，且在区间 (x_0,x_1) 上 $\varphi_1(x)<\varphi_2(x)$. 对于 $x\in[x_0,x_1]$，有

$$\varphi_1(x)=y_0+\int_{x_0}^x f(\xi,\varphi_1(\xi))\mathrm{d}\xi,\quad \varphi_2(x)=y_0+\int_{x_0}^x f(\xi,\varphi_2(\xi))\mathrm{d}\xi.$$

将两式相减，由于 $\varphi_2(x)>\varphi_1(x)$，所以

$$\int_{x_0}^{x}[f(\xi,\varphi_2(\xi))-f(\xi,\varphi_1(\xi))]\mathrm{d}\xi>0.$$

而$f(x,y)$对y单调非增，故应小于零，引出矛盾. 故知方程的右行解$(x>x_0)$恒由初值唯一确定.

第二节　解的延展

主要内容

定理2.2(延展定理)　若方程$y'=f(x,y)$的右端函数$f(x,y)$在(有界或无界)区域D上连续，且关于y满足局部李普希兹条件，则对于D上任意一点(x_0,y_0)，方程$y'=f(x,y)$以(x_0,y_0)为初值的解$\varphi(x)$均可以向左右延展，直到$(x,\varphi(x))$任意接近区域D的边界.

定理2.3(第一比较定理)　设函数$f(x,y)$，$F(x,y)$定义在某个区域D上，且满足以下条件：

(1) 在D上满足存在与唯一性定理条件；

(2) 在D上有不等式$f(x,y)<F(x,y)$，则方程$y'=f(x,y)$的满足初始条件$\varphi(x_0)=y_0$的解$\varphi(x)$和方程$y'=F(x,y)$的满足初始条件$\Phi(x_0)=y_0$的解$\Phi(x)$在它们共同存在的区间上满足不等式

$$\begin{cases}\varphi(x)<\Phi(x), & \text{当 } x>x_0 \text{ 时},\\ \varphi(x)>\Phi(x), & \text{当 } x<x_0 \text{ 时}.\end{cases}$$

疑难解析

1. 什么是局部李普希兹条件?

答　如果方程$y'=f(x,y)$的右端函数$f(x,y)$在区域G上的每一点，均有以它为中心且完全属于G的闭矩形R存在，使得函数$f(x,y)$在R上满足李普希兹条件. 对于G上的不同点，矩形R及李

普希兹常数可以不同，这时称函数$f(x,y)$在G上满足局部李普希兹条件.

如果方程$y'=f(x,y)$的右端函数满足在G上连续，且关于y满足局部李普希兹条件，就可以把解的存在区间向左方或右方延展开去.

2. 怎样理解延展定理？

答 在定理2.1中给出了解的存在与唯一性，但只指出初值问题的解在$|x-x_0|\leqslant h$上的存在，可人们总是希望解的存在区间要更广阔些，延展定理给了一个较圆满的回答. 即在一定条件下，解可以向左右延展，直到$(x,\varphi(x))$任意接近D的边界.

怎样理解"$(x,\varphi(x))$任意接近区域D的边界"呢？需了解以下几点：

(1) 若D是有界区域，则积分曲线可任意接近D的边界；

(2) 若D是无界区域，初值问题$y'=f(x,y)$，$y(x_0)=y_0$的$\varphi(x)$可以向x_0的两方延展.

例如，向$x=x_0$的右方延展(与向左方延展时类似)，有以下几种可能：

(i) 解$\varphi(x)$的存在区间为$[x_0,+\infty)$，此时区域D的右方无界；

(ii) 若解的存在区间为$[x_0,x_1]$(x_1为有限数)，则当$x\to x_1$时，或者$y=\varphi(x)$无界，此时$\varphi(x)$当$x\to x_0$时，以$x=x_1$为铅直渐近线；或者$(x,\varphi(x))$趋于区域D的(有限)边界.

但要注意，并不是方程的所有解都可以无限延展. 例如

方程$y'=y^2$的通解为$y=\dfrac{1}{C-x}$，其通过点(1,1)的积分曲线为$y=\dfrac{1}{2-x}$，它可以向左无限延展. 但是，当$x\to 2^-$时，$y\to+\infty$，所以其存在域为$(-\infty,2)$，其通过点$(3,-1)$的积分曲线$y=\dfrac{1}{2-x}$向左不能无限延展；当$x\to 2^+$时，$y\to-\infty$，所以其存在域为$(2,+\infty)$，只有解$y=0$可以向左右两个方向无限延展.

方法、技巧与典型例题分析

例1 在全平面上，$f(x,y)$连续且有界，并且$f'_y(x,y)$连续，证明：方程$y'=f(x,y)$的一切解$y=\varphi(x)$的存在区间，必均为$(-\infty,+\infty)$.

证 由$f'_y(x,y)$在全平面R上连续知，$f(x,y)$在R上满足局部李普希兹条件. 又由$f(x,y)$在R上连续，故方程$y'=f(x,y)$满足延展定理，所以方程的一切解都能延展到R的边界(即延展到无穷远).

现在考虑过任一点$P(x_0,y_0)$的解，如图2.1所示. 因为$f(x,y)$在R上有界，可设在R上有$|f(x,y)|<M$. 过点$P(x_0,y_0)$作斜率为M和$-M$的两条直线.

图2.1

由于$|f(x_0,y_0)|<M$，故过点$P(x_0,y_0)$的积分曲线必在这两条直线所围成的对角区域内，向左和向右延展. 根据上面的证明知，积分曲线可以延展到无穷远处.

由上面的证明知，在向左和向右的延展过程中，积分曲线不能穿越斜率为M及$-M$的直线. 否则，若积分曲线能从直线上的某点$Q(x_1,y_1)$处穿越直线，则必有$|f(x_1,y_1)|\geq M$，导出矛盾.

从而，知积分曲线在两个对角区域内，无限地向左和向右延展. 而两直线的存在区间为$(-\infty,+\infty)$，故过点$P(x_0,y_0)$的解的存在区间是$(-\infty,+\infty)$.

例2 证明：对于任意的x_0及满足条件$0<y_0<1$的y_0，方程$y'=\dfrac{y(y-1)}{1+x^2+y^2}$的满足条件$y(x_0)=y_0$的解$y=y(x)$在$(-\infty,+\infty)$上存在.

证 因为

$$f(x,y)=\frac{y(y-1)}{1+x^2+y^2},$$

$$f'_y(x,y)=\frac{(2y-1)(1+x^2+y^2)-2y^2(y-1)}{(1+x^2+y^2)^2}$$

在全平面上连续;所以方程在全平面上满足存在唯一性定理与延展定理.

因为 $y=0$ 与 $y=1$ 均为方程在 $(-\infty,+\infty)$ 上的解,则由延展定理可知,通过点 (x_0,y_0) 的积分曲线 $(|x_0|<+\infty,0<y_0<1)$ 在区域 $|x_0|<+\infty,0<y_0<1$ 上,一方面可以向 $x=x_0$ 的左、右两侧延展,一方面又由唯一性限制,$y=y(x)$ 不能穿越直线 $y=0$ 与 $y=1$,所以解的存在区间为 $(-\infty,+\infty)$.

例 3 试求方程 $y'=\frac{1}{2}(y^2-1)$ 的通过点 $(0,0)$ 以及通过点 $(\ln 2,-3)$ 的解的存在区间,并讨论当 x 趋近这些区间端点时,解的性状.

解 可以验证,$y=\pm 1$ 是方程的解. 当 $y\neq\pm 1$ 时,分离变量后两端积分,得方程通解

$$y=\frac{1+Ce^x}{1-Ce^x}.$$

代入 $y(0)=0$,解得 $C=-1$. 故通过点 $(0,0)$ 的解为 $y=\frac{1-e^x}{1+e^x}$,解的存在区间为 $(-\infty,+\infty)$,并且有

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1-e^x}{1+e^x}=1,\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{1-e^x}{1+e^x}=-1.$$

通过点 $(\ln 2,-3)$ 的解为 $y=\frac{1+e^x}{1-e^x}$,其定义区间为 $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$. 由于 $x=\ln 2\in(0,+\infty)$,故由解的表达式知

$$\lim_{x\to 0}y(x)=-\infty,\quad \lim_{x\to+\infty}y(x)=-1.$$

例 4 若 $f(x,y)$ 在全平面上连续可微,且 $f(x,y_0)\equiv 0$,证明:若方程 $y'=f(x,y)$ 的非常数解 $y=y(x)$ 当 $x\to x_0$ 时有 $y\to y_0$,则 x 必为 $-\infty$ 或 $+\infty$.

证 依题意知,方程在全平面上满足存在唯一性定理条件,并且同时满足延展定理条件.

由于 $f(x,y_0)\equiv 0$，故方程有常数解 $y=y_0$.

用反证法. 设 $y=y(x)$ 是方程的非常数解，$\lim\limits_{x\to x_0} y(x)=y_0$，而 x_0 是有限值(图 2.2). 在积分曲线 $y=y(x)$ 充分靠近 (x_0,y_0) 处作解的延展(由解的延展到无穷远的性质，延展下去是可能的)，则延展后的积分曲线必过点 $P(x_0,y_0)$(否则，积分曲线将不连续).

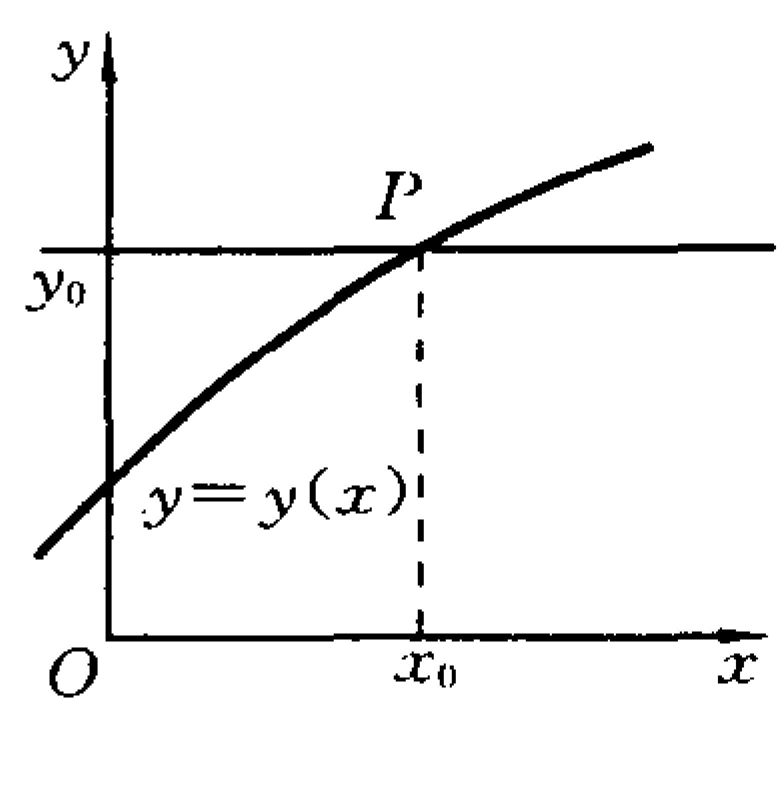


图 2.2

所以，此时过点 $P(x_0,y_0)$ 的积分曲线有两条，即 $y=y_0$ 与 $y=y(x)$，这与解的唯一性相矛盾. 因而得出 x_0 不是有限值，必为 $-\infty$ 或 $+\infty$.

例 5 讨论方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=(1-y^2)\mathrm{e}^{xy^2}$ 的每一个解的最大存在区间，以及当 x 趋于这区间的两端点时解的性状.

解 显然，函数 $f(x,y)=(1-y^2)\mathrm{e}^{xy^2}$ 在全平面 R 上连续可微，所以对任取的初始点 (x_0,y_0)，方程满足初始条件 $y(x_0)=y_0$ 的解存在且唯一. 可以验证，$y=\pm 1$ 是方程的解.

用直线 $y=-1$，$y=1$ 为界将全平面 R 分为三个区域进行讨论.

(1) 在区域 R_1：$-1<y<1$，$-\infty<x<+\infty$ 上，由于 $f(x,y)>0$，则对任意初始点 $(x_0,y_0)\in R_1$，方程满足初始条件 $y(x_0)=y_0$ 的解 $y=\varphi(x)$ 单调增加，存在区间为 $(-\infty,+\infty)$. 当 $x\to-\infty$ 时，以 $y=-1$ 为渐近线；当 $x\to+\infty$ 时，以 $y=1$ 为渐近线.

(2) 在区域 R_2：$y>1$，$-\infty<x<+\infty$ 上，由于 $f(x,y)<0$，则对任意初始点 $(x_0,y_0)\in R_2$，方程满足初始条件 $y(x_0)=y_0$ 的解 $y=\varphi(x)$ 单调减少，存在区间为 $(-\infty,+\infty)$. 当 $x\to-\infty$ 时，$\varphi'(x)\to 0$；当 $x\to+\infty$ 时，以 $y=1$ 为渐近线.

(3) 在区域 R_3：$y<-1$，$-\infty<x<+\infty$ 上，由于 $f(x,y)<0$，则对任意初始点 $(x_0,y_0)\in R_3$，方程满足初始条件 $y(x_0)=y_0$ 的解 y

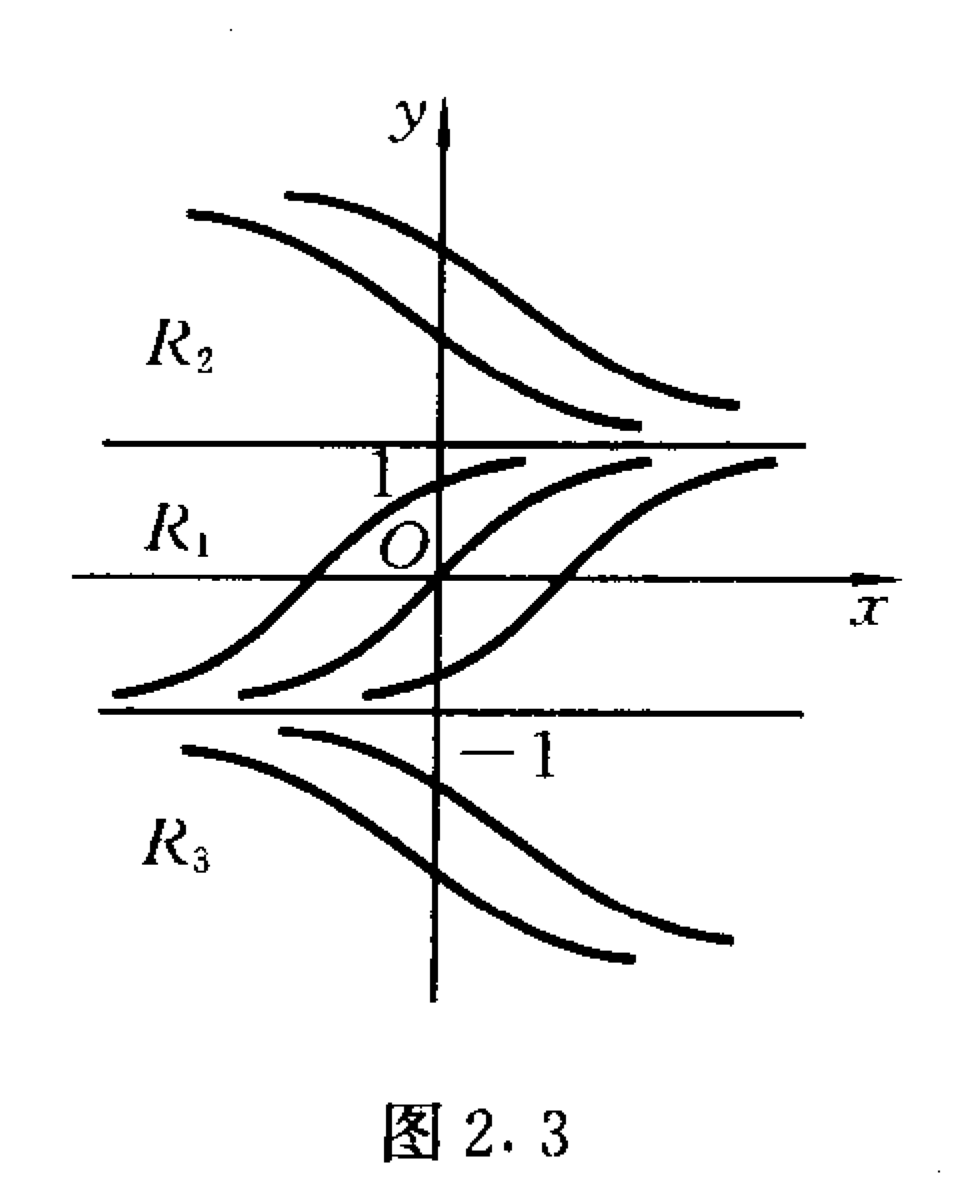


图 2.3

$=\varphi(x)$单调减少，存在区间为$(-\infty,+\infty)$. 当$x\to-\infty$时，以$y=-1$为渐近线；当$x\to+\infty$时，$\varphi(x)\to-\infty$.

其积分曲线分布如图 2.3 所示.

如果$y=\varphi(x)$是初值问题$y'=f(x,y)$，$y(x_0)=y_0$的定义在某区间上的一个解，它不能再向左或向右延展，此时的解称为初值问题的一个**饱和解**. 饱和解的定义区间称为它的(最大)存在区间. 若$f(x,y)$定义在$a<x<b$，$|y|<\infty$(允许$a=-\infty$，$b=+\infty$)，则初值问题的饱和解$y=y(x)$的存在区间(α,β)必属于下列情形之一：(1) $\alpha=a(\beta=b)$；(2) $\alpha<a(\beta<b)$，但当$x\to\alpha^+(x\to\beta^-)$时，$\lim|y(x)|=\infty$.

例6 设$f(x,y)$与$f'_y(x,y)$在带形域R:$\alpha\leqslant x\leqslant\beta$，$-\infty<y<+\infty$上连续，且对任何区间$[a,b]\subseteq(\alpha,\beta)$，存在$M>0$，使得$|f'_y(x,y)|<M(a\leqslant x\leqslant b,-\infty<y<+\infty)$. 证明：方程$y'=f(x,y)$的每一个解的最大存在区间是$[\alpha,\beta]$.

证 对于任意点$(x_0,y_0)\in R$，由题设知，初值问题$y'=f(x,y)$，$y(x_0)=y_0$的局部解存在且唯一.

因为对任意$\varepsilon>0$，区间$[\alpha+\varepsilon,\beta-\varepsilon]\subseteq(\alpha,\beta)$，由

$$(x,y)\in R_1\triangleq\{(x,y)\mid\alpha+\varepsilon\leqslant x\leqslant\beta-\varepsilon,-\infty<y<+\infty\},$$

$$f'_y(x,y)<M,$$

所以$f(x,y)$在R_1上满足李普希兹条件，即对任意(x,y_1)，$(x,y_2)\in R_1$，有

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\leqslant M|y_1-y_2|. \qquad ①$$

对$x\in[\alpha+\varepsilon,\beta-\varepsilon]$，作逐次迭代

$$y_1(x_0)=y_0$$

$$y_k(x_0)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(\xi,y_{n-1}(\xi))\mathrm{d}\xi,\quad k=2,3,\cdots,$$

则由式①可得估计式

$$|y_n(x)-y_{n-1}(x)|\leqslant\frac{M^{n-1}(x-x_0)^{n-1}}{n!}.$$

所以$y_n(x)+\sum_{n=1}^{\infty}(y_n(x)-y_{n-1}(x))$是$[a+\varepsilon,b-\varepsilon]$上的绝对一致收敛级数．从而知连续函数列$\{y_n(x)\}$在$[a+\varepsilon,b-\varepsilon]$上一致收敛于初值问题的解$y(x)$，即$y(x)$的定义区间为$[a+\varepsilon,a-\varepsilon]$．当$\varepsilon\to0$时，$y(x)$的存在区间为$(\alpha,\beta)$．

又由$f(x,y)$在R内的连续性知，当$x\to\alpha^+$或$x\to\beta^-$时，$y(x)$趋于有限值．在$x=\alpha,\beta$时对$y(x)$补充定义即知，$y(x)$的最大存在区间为$[\alpha,\beta]$．

例7 设$f(x,y)$在全平面上连续，且满足李普希兹条件$|f(x,y)-f(x,\bar{y})|\leqslant N|y-\bar{y}|,N>0$．证明：

（1）初值问题$y'=f(x,y)\sin\dfrac{x}{n}$，$y(0)=0$的解$y_n(x)$在$(-\infty,+\infty)$上存在；

（2）$\lim\limits_{n\to+\infty}y_n(x)=0$．

证 （1）$g(x,y)=f(x,y)\sin\dfrac{x}{n}$在全平面上连续，且满足李普希兹条件

$$|g(x,y)-g(x,\bar{y})|\leqslant|f(x,y)-f(x,\bar{y})|\leqslant N|y-\bar{y}|.$$

所以，由解的存在唯一性定理与延展定理知，上述初值问题存在唯一饱和解$y=y_n(x)$．

用反证法证明解的最大存在区间．若$y_n(x)$的最大存在区间为(α,β)，$\beta<+\infty$．因为

$$y_n(x)=\int_0^x f(t,y_n(t))\sin\frac{t}{n}\mathrm{d}t\quad(x\geqslant0),$$

故
$$|y_n(x)|\leqslant\int_0^x|f(t,y_n(t))-f(t,0)|\mathrm{d}t+\int_0^x|f(t,0)|\mathrm{d}t$$
$$\leqslant M_1\beta+\int_0^x M|y_n(t)|\mathrm{d}t.$$

则由贝尔曼(Bellman)不等式(设$f(t)$与$g(t)$在$\alpha\leqslant t\leqslant\beta$上非负连续,且满足$f(t)\leqslant k+\int_\alpha^t f(t)g(\xi)\mathrm{d}\xi$,则有$f(t)\leqslant k\mathrm{e}^{\int_\alpha^t g(\xi)\mathrm{d}\xi}$知,$|y_n(x)|\leqslant M_1\beta\mathrm{e}^{Nx}$. 于是,当$x\to\beta^-$时,$|y_n(x)|$不趋于正无穷,与饱和解存在的情形矛盾,所以$\beta=+\infty$. 类似可证$\alpha=-\infty$.

(2) 对任意固定的$x\in(-\infty,+\infty)$,取B充分大,使$|x|\leqslant B$. 则利用李普希兹条件易证

$$\left|f(x,y_n(x))\sin\frac{x}{n}\right|\leqslant\left|f(x,0)\sin\frac{x}{n}\right|+N|y_n(x)|\left|\sin\frac{x}{n}\right|.$$

由于$\left|\sin\frac{x}{n}\right|\leqslant\frac{x}{n}$,得

$$|y_n(x)|\leqslant\left|\int_0^x N|y_n(t)|\cdot\left|\frac{t}{n}\right|\mathrm{d}t\right|+\left|\int_0^x|f(t,0)|\cdot\left|\frac{t}{n}\right|\mathrm{d}t\right|$$

$$\leqslant\frac{B^2}{n}M_2+\frac{B}{n}N\int_0^x|y_n(t)|\mathrm{d}t.$$

其中$M_2=\max\limits_{x\in[-B,B]}|f(x,0)|$. 由上式与贝尔曼不等式可得

$$|y_n(x)|\leqslant\frac{B^2}{n}M^2\mathrm{e}^{B^2N/n}.$$

当$n\to+\infty$时,有$\lim\limits_{n\to+\infty}|y_n(x)|=0$.

例8 设线性方程$y'+p(x)y=q(x)$,$p(x)$,$q(x)$在区间$[a,b]$上连续. 证明:线性方程的任一解均在$[a,b]$上有定义.

证 因为

$$f(x,y)=-p(x)y+q(x),\quad f'_y(x,y)=-p(x),$$

所以,当$x\in[a,b]$,$|y|<\infty$时,$|f'_y(x,y)|\leqslant\max\limits_{x\in[a,b]}|p(x)|=N$. 由例6知,方程的任一解均在区间$[a,b]$上存在.

例9 设$f(x,y)$在整个平面连续,且对y满足局部李普希兹条件,如果下面条件之一成立:

(1) $f(x,y)$是有界的,即$\exists M>0$,使得$(x,y)\in R^2$,有$|f(x,y)|\leqslant M$;

(2) 对$\forall(x,y)\in R^2$,有$|f(x,y)|\leqslant N|y|+C$,其中$N>0$,

$C \geqslant 0$.

则对方程$\frac{dy}{dx}=f(x,y)$的任一解的最大存在区间为$(-\infty,+\infty)$.

证 设$y=\varphi(x)$是初值问题$\frac{dy}{dx}=f(x,y)$, $y(x_0)=y_0$的解，最大存在区间为(α,β). 来证明$\beta=+\infty$(同样可证$\alpha=-\infty$).

因为初值问题等价于积分方程

$$\varphi(x)=\varphi(x_0)+\int_{x_0}^{x} f(s,\varphi(s))ds, \quad x\in(\alpha,\beta),$$

于是 $$|\varphi(x)|\leqslant|\varphi(x_0)|+\left|\int_{x_0}^{x} f(s,\varphi(s))ds\right|, \quad x\in(\alpha,\beta). \qquad ①$$

可以分两种情形用反证法证明.

(1) 设条件(1)成立，但$\beta<+\infty$，则由式①知，对(x_0,β)有

$$\begin{aligned}|\varphi(x)|&\leqslant|\varphi(x_0)|+M|x-x_0|\leqslant|\varphi(x_0)|+M|\beta-x_0|\\&=M_1<+\infty,\end{aligned}$$

从而$y=\varphi(x)$是有界的，这与定理2.3(2)矛盾. 所以，必有$\beta=+\infty$.

(2) 设条件(2)成立，但$\beta<+\infty$，则由(1)知，对(x_0,β)有

$$|\varphi(x)|\leqslant|\varphi(x_0)|+\int_{x_0}^{x}(N|\varphi(s)|+C)ds.$$

由格隆威尔(Gronwall)不等式，对(x_0,β)有

$$\begin{aligned}|\varphi(x)|&\leqslant(|\varphi(x_0)|+C|\beta-x_0|)e^{\int_{x_0}^{x}N ds}\\&\leqslant(\varphi(x_0)+C|\beta-x_0|)e^{N|\beta-x_0|}=M_2<+\infty,\end{aligned}$$

从而$y=\varphi(x)$在(x_0,β)上是有界的. 这与定理2.3(2)矛盾. 所以，必有$\beta=+\infty$.

(注 格隆威尔不等式即贝尔曼不等式，详见本章第三节例1.)

例10 证明：微分方程$\frac{dy}{dx}=\frac{\sin y}{x^2+y^2+1}$的任一解的存在区间为$(-\infty,+\infty)$.

证 证法一 显然，$y=n\pi(n=0,\pm1,\pm2)$是方程的解，且存在区间为$(-\infty,+\infty)$. 又函数$f(x,y)=\dfrac{\sin y}{x^2+y^2+1}$在全平面满足解的存在性和唯一性定理及解的延展定理的条件，故对一切x_0和$y_0\neq n\pi$，存在某个$n=n_0$，使得$n_0\pi<y_0<(n_0+1)\pi$. 由解的延展定理知，过点(x_0,y_0)的积分曲线可以左右延展；又由解的存在与唯一性定理知，该积分曲线不可能超过直线$y=n_0\pi$与$y=(n_0+1)\pi$. 所以，方程满足初值条件x_0,y_0的解的存在区间为$(-\infty,+\infty)$. 于是，方程的任一解的存在区间为$(-\infty,+\infty)$.

证法二 设函数$f(x,y)=\dfrac{\sin y}{x^2+y^2+1}$满足解的存在性与唯一性定理及解的延展定理条件，则由于$-1\leqslant\dfrac{\sin y}{x^2+y^2+1}\leqslant1$，将原方程与方程$\dfrac{dy}{dx}=-1$，$\dfrac{dy}{dx}=1$进行比较，由第一比较定理可知，对任意的$x_0,y_0$，方程满足初值条件$y(x_0)=y_0$的解在其存在区间上有

$$y_0-(x-x_0)<y(x)<y_0+(x-x_0),\quad x\geqslant x_0,$$
$$y_0+(x-x_0)<y(x)<y_0-(x-x_0),\quad x\leqslant x_0,$$

即原方程满足初值条件$y(x_0)=y_0$的解都在直线

$$y=y_0+(x-x_0),\quad y=y_0-(x-x_0)$$

之间. 由解的存在性和唯一性定理及解的延展定理知，$y=y(x)$的解向两侧延展并无限远离原点，所以，任一解的存在区间为$(-\infty,+\infty)$.

例 11 设$f(t,x_0)$是全平面上的连续函数，$f(t,x_0)\equiv0$，求证：若方程$\dfrac{dx}{dt}=f(t,x)$的非常数解$x=\varphi(t)$当$t\to t_0$时趋于x_0，则t_0为非有限数.

证 用反证法. 假设t_0为有限数，并设$t_1<t_0$，且$\varphi(t_1)=x_1$，则$x=\varphi(t)$是下列初值问题的解：

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x),\quad x(t_1)=x_1,$$

且有$\lim\limits_{t\to t_0^-}\varphi(t)=x_0$. 由$\varphi(t)$的连续性知，$\varphi(t_0)=x_0$. 又因为$f(t,x_0)\equiv 0$，所以$x\equiv x_0$是$\dfrac{dx}{dt}=f(t,x)$的常数解.

另一方面，由于$f(t,x)$在全平面连续可微，故在(t,x_0)附近，方程$\dfrac{dx}{dt}=f(t,x)$的解存在且唯一，即至少在$|t-t_0|<h$（h为适当小的数，且$h>0$）时，局部的解是存在且唯一的. 但现在过(t,x_0)有两个解：

$$x\equiv x_0,\quad x=\varphi(t),\quad t_0-h\leqslant t\leqslant t_0+h,$$

所以，由解的唯一性知，应有$\varphi(t)\equiv x_0, t\in[t_0-h,t_0+h]$，而这又与$x=\varphi(t)$是非常数解矛盾. 从而知$t_0$必为非有限数.

例 12 指出方程$\dfrac{dx}{dt}=(1-x^2)e^{tx^2}$的每一个解的最大存在区间以及当$t$趋于这区间两端点时解的性态.

解 (1) 显见$x\equiv 1$是方程的一个解，它的最大存在区间是$(-\infty,+\infty)$.

(2) 原方程可改写为$\dfrac{dx}{1-x^2}=e^{tx^2}dt$，两端分别关于$x,t$积分，得

$$\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{1-x^2}=\int_{t_0}^{t}e^{tx^2}dt.$$

(i) 当$|x_0|<1$时，因为$x'>0$，所以x单调增加. 此时在带状区域$|x|\leqslant 1$中讨论问题可知，因为$\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)$存在（记为$x_2$），$\lim\limits_{t\to-\infty}x(t)$存在（记为$x_1$），且$x_0<x_2=1$. 又注意到当$t>t_0$时，有

$$\int_{t_0}^{t}e^{tx^2}dt<\int_{t_0}^{t}e^{t}dt=e^{t}-e^{t_0}.$$

显然，取$t\to+\infty$的极限，有$\int_{t_0}^{+\infty}e^{tx^2}dt=+\infty$，即

$$\lim_{t\to+\infty}\int_{x_0}^{x(t)}\frac{d\xi}{1-\xi^2}=\int_{x_0}^{x_2}\frac{d\xi}{1-\xi^2}=+\infty,$$

则必有$x_2=1$. 从而，积分曲线在$t\to+\infty$时，有渐近线$x\equiv 1$. 而在$t<t_0$情形，有

$$\lim_{t\to+\infty}\int_{x_0}^{x(t)}\frac{d\xi}{1-\xi^2}=\lim_{t\to-\infty}\int_{t_0}^{t}e^{sx^2}ds,$$

即
$$\int_{x_0}^{x_1}\frac{d\xi}{1-\xi^2}>\int_{t_0}^{-\infty}e^{sx_1^2}ds,$$

积分可得
$$\ln\sqrt{\frac{(1+x_1)(1-x_0)}{(1-x_1)(1+x_0)}}>-\frac{e^{t_0x_1^2}}{x_1^2}.$$

若记 $r\overset{\text{def}}{\equiv}\dfrac{2e^{t_0x_1^2}}{x_1^2}$，则上式为

$$\frac{(1+x_1)(1-x_0)}{(1-x_1)(1+x_0)}>e^{-r}\equiv p\Rightarrow 0<p<1,$$

得
$$(1-x_0)+(1-x_0)x_1>p(1+x_0)-p(1+x_0)x_1,$$

即
$$[(1-x_0)+p(1+x_0)]x_1>p(1+x_0)-(1-x_0),$$

所以
$$x_1>\frac{p(1+x_0)-(1-x_0)}{(1-x_0)+p(1+x_0)}.$$

从而证明

$$\frac{p(1+x_0)-(1-x_0)}{p(1+x_0)+(1-x_0)}>-1.$$

上式等价于

$$p(1+x_0)-(1-x_0)>-p(1+x_0)-(1-x_0),$$

即
$$2p(1+x_0)>0.$$

因此 $x_0>x_1>-1$. 当 $t\to-\infty$ 时，积分曲线有渐近线 $x\equiv x_1>-1$. 此时，解的最大存在区间是 $(-\infty,+\infty)$.

(ii) 当 $x_0>1$ 时，积分曲线必在半平面 $x>1$ 内. 因为 $t\geqslant t_0$ 时，$\int_{t_0}^{t}e^{sx^2(s)}ds\geqslant0$，又因 $x'(t)<0$，所以 $x(t)$ 单调减少，由 $\int_{x_0}^{x(t)}\dfrac{d\xi}{1-\xi^2}>0$，得 $1<x(t)\leqslant x_0$. 由于

$$\lim_{t\to+\infty}\int_{x_0}^{x(t)}\frac{d\xi}{1-\xi^2}=\lim_{t\to+\infty}\int_{t_0}^{t}e^{sx^2(s)}ds,$$

若记 $\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)=x_2$，则有

$$\int_{x_0}^{x_2}\frac{d\xi}{1-\xi^2}=\int_{t_0}^{+\infty}e^{sx^2(s)}ds>\int_{t_0}^{+\infty}e^{s}ds=+\infty.$$

所以$\ln\sqrt{\frac{(1+x_2)(1-x_0)}{(1-x_2)(1+x_0)}}=+\infty$，即$x_2=1$．于是，积分曲线当$t\geqslant t_0$时，由$x_0$单调减少趋于1($t\to+\infty$时)；当$t<t_0$时，记$\lim\limits_{t\to-\infty}x(t)=x_1^*$，得

$$\int_{x_0}^{x_1}\frac{d\xi}{1-\xi^2}=\int_{t_0}^{-\infty}e^{sx^2(s)}ds<\int_{t_0}^{-\infty}e^{sx_0^2}ds=-\frac{e^{t_0x_0^2}}{x_0^2}=-\frac{\tilde{r}}{2}.$$

由于
$$\ln\frac{(1+x_1^*)(1-x_0)}{(1-x_1^*)(1+x_0)}<-\tilde{r},$$

即
$$\frac{(1+x_1^*)(1-x_0)}{(1-x_1^*)(1+x_0)}<e^{-\tilde{r}}=\tilde{p},$$

有
$$(1-x_0)+x_1^*(1+x_0)>(1+x_0)\tilde{p}-(1+x_0)\tilde{p}x_1^*,$$
$$(1-x_1^*<0)$$

即
$$[(1-x_0)+(1+x_0)\tilde{p}]x_1^*>(1+x_0)\tilde{p}-(1-x_0),$$

所以
$$x_1^*>\frac{(1+x_0)\tilde{p}-(1-x_0)}{(1+x_0)\tilde{p}+(1-x_0)}>x_0.$$
$$\left((1-x_0)+(1+x_0)\tilde{p}>0,\text{即}\,\tilde{p}>\frac{x_0-1}{x_0+1}\right)$$

因为
$$\tilde{p}>\frac{(1+x_1^*)(x_0-1)}{(x_1^*-1)(x_0+1)},$$

所以
$$\tilde{p}>\frac{(x_1^*-1)}{(x_1^*+1)}\tilde{p}>\frac{x_0-1}{x_0+1}.$$

另一方面，因为$x_0^2>1$，所以
$$(\tilde{p}-1)+x_0(\tilde{p}+1)>(\tilde{p}+1)x_0+x_0^2(p-1),$$

即
$$\frac{(1+x_0)\tilde{p}-(1-x_0)}{(1+x_0)\tilde{p}+(1-x_0)}>x_0.$$

故当$t<t_0$时，积分曲线由x_0开始单调增加，并趋于x_1^*．综上所述，此时解的最大存在区间是$(-\infty,+\infty)$．

(iii) 当$x_0<-1$时，积分曲线必在半平面$x<-1$上．当$t>t_0$时，$x'(t)<0$，$x(t)$单调减少．$t\to+\infty$是不可能的，因为若$t\to+\infty$，则$\int_{t_0}^{+\infty}e^{sx^2(s)}ds>\int_{t_0}^{+\infty}e^{s}ds=+\infty$；但若$\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)=x_2$，则$x_2=-\infty$或

$x_2>-\infty$，它们均不可能. 这说明当 $t\to t_2$ 时（$t_2<+\infty$），$x(t)\to -\infty$，即

$$\lim_{t\to t_1}\int_{x_0}^{x(t)}\frac{1}{1-\xi^2}\mathrm{d}\xi=\lim_{t\to t_2}\int_{t_0}^{t}\mathrm{e}^{sx^2(s)}\mathrm{d}s,$$

$$\int_{x_0}^{-\infty}\frac{\mathrm{d}\xi}{1-\xi^2}=\int_{t_0}^{t_2}\mathrm{e}^{sx^2(s)}\mathrm{d}s,$$

即
$$\ln\sqrt{\frac{x_0-1}{x_0+1}}=\int_{t_0}^{t_2}\mathrm{e}^{sx^2(s)}\mathrm{d}s.$$

故 $t_2<+\infty$. 而当 $t<t_0$ 时，$x'(t)<0$，$x(t)$ 单调减少，即 $x(t)$ 沿小于 t_0 的 t 减小的方向单调增加. 设 $\lim\limits_{t\to-\infty}x(t)=x_2$，则有

$$\lim_{t\to-\infty}\int_{x_0}^{x(t)}\frac{\mathrm{d}\xi}{1-\xi^2}=\int_{t_0}^{-\infty}\mathrm{e}^{sx^2(s)}\mathrm{d}s>\int_{t_0}^{-\infty}\mathrm{e}^{sx_0^2}\mathrm{d}s$$

$$>\int_{t_0}^{-\infty}\mathrm{e}^{s}\mathrm{d}s=+\infty,$$

从而有
$$\frac{1}{2}\ln\frac{(1+x_1)(1-x_0)}{(1-x_1)(1+x_0)}=+\infty.$$

故 $x_1=-1$. 因此，当 $t\to-\infty$ 时，积分曲线有渐近线 $x\equiv-1$. 综上所述可知，在 $x_0<-1$ 的情形中，解的最大存在区间为 $(-\infty,t_2)$.

例 13 设 $f(t)$ 在 $t\geqslant 0$ 上连续，$K(t,s)$ 在 $0\leqslant s\leqslant t$ 上连续，试用逐次逼近法证明伏尔特拉(Volterra)积分方程

$$x(t)=f(t)+\int_0^t K(t,s)x(s)\mathrm{d}s \tag{①}$$

的解在 $t\geqslant 0$ 上存在且唯一.

证 解的整体存在性可分五步进行.

(1) 对任意 $T>0$，证明题给方程的解在 $[0,T]$ 上存在. 对 $t\in[0,T]$，构造逐次逼近序列：

$$x_0(t)=f(t),$$

$$x_1(t)=f(t)+\int_0^t K(t,s)x_0(s)\mathrm{d}s,$$

$$\vdots$$

$$x_n(t)=f(t)+\int_0^t K(t,s)x_{n-1}(s)\mathrm{d}s.$$

此序列不仅有定义，且每个函数$x_k(t)(k=1,2,\cdots)$在$[0,T]$上连续.

（2）证明函数项级数

$$x_0(t)+[x_1(t)-x_0(t)]+\cdots+[x_n(t)-x_{n-1}(t)]+\cdots$$

是受一个收敛的数项级数“强控制”的，从而函数序列$\{x_k(t),k=0,1,2,\cdots\}$是一致收敛的，并记其极限函数为$\varphi(t)$，则$\varphi(t)$也是$[0,T]$上的连续函数. 再记

$$\max_{t\in[0,T]} f(t)=M, \quad \max_{0\leqslant s\leqslant t\leqslant T}|K(t,s)|=N.$$

因为

$$|x_0(t)|\leqslant|f(t)|\leqslant M,$$

$$|x_1(t)-x_0(t)|\leqslant\int_0^t|K(t,s)||x_0(s)|\mathrm{d}s\leqslant MNt,$$

$$|x_2(t)-x_1(t)|\leqslant\int_0^t|K(t,s)||x_1(s)-x_0(s)|\mathrm{d}s\leqslant MN^2\frac{t^2}{2},$$

设

$$|x_n(t)-x_{n-1}(t)|\leqslant MN^n\frac{t^n}{n!},$$

则

$$|x_{n+1}(t)-x_n(t)|\leqslant\int_0^t|K(t,s)||x_n(s)-x_{n-1}(s)|\mathrm{d}s\leqslant MN^{n+1}\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}.$$

由数学归纳法，得

$$|x_0(t)|+\sum_{k=1}^{\infty}|x_k(t)-x_{k-1}(t)|\leqslant M\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(Nt)^k}{k!}\leqslant Me^{NT}<+\infty.$$

因此，存在$[0,T]$上的连续函数$\varphi(t)$，使得当$t\in[0,T]$时，函数序列$\{x_n(t),n=0,1,2,\cdots\}$一致收敛于$\varphi(t)(n\to+\infty)$.

（3）证明极限函数在$[0,T]$上满足题给方程. 因为

$$x_n(t)=f(t)+\int_0^t K(t,s)x_{n-1}(s)\mathrm{d}s,$$

将上式两端取极限$n\to+\infty$，得

$$\varphi(t)=f(t)+\int_0^t K(t,s)\varphi(s)\mathrm{d}s.$$

这里积分号下可以取极限是因为，对于$s\in[0,t]\subseteq[0,T]$，$x_{n-1}(s)$一致收敛于$\varphi(s)$.

（4）证明在$[0,T]$上，题给方程的解是唯一的. 设有两个解

$\varphi(t)$与$\psi(t)$，令$y(t)=\varphi(t)-\psi(t)$，显然有

$$y(t)=\int_0^t K(t,s)y(s)\mathrm{d}s.$$

记$u(t)=|y(t)|$，则有

$$u(t)\leqslant N\int_0^t u(s)\mathrm{d}s.$$

令$v(t)=\int_0^t u(s)\mathrm{d}s$，则有$v(0)=0, v(t)\geqslant 0$，且

$$v'(t)=u(t)\leqslant Nv(t),$$

即
$$v'(t)-Nv(t)\leqslant 0 \quad 或 \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\mathrm{e}^{-Nt}v(t)]=0.$$

$$\mathrm{e}^{-Nt}v(t)\leqslant \mathrm{e}^{-N0}v(0)=0,$$

即$v(t)\leqslant 0$. 综上所述可知，$v(t)=0$，于是$u(t)\equiv 0$，即在$t\in[0,T]$上，$\varphi(t)\equiv\psi(t)$，知解唯一.

(5) 由T的任意性知，题给方程的解在$t\geqslant 0$上存在且唯一.

直接证明只要利用$[0,T]\subseteq[0,\infty)$，T是任意的，即可证出.

第三节　解对初值的连续依赖性

主要内容

1. **定义 2.1**　设初值问题$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y), y'(x_0^*)=y_0^*$的解$y=\varphi(x,x_0^*,y_0^*)$在区间$[a,b]$上存在. 如果对于任意$\varepsilon>0$，存在$\delta(\varepsilon,x_0^*,y_0^*)>0$，使得对于满足$|x_0-x_0^*|<\delta$，$|y_0-y_0^*|<\delta$的一切$(x_0,y_0)$，初值问题$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y), y(x_0)=y_0$的解$y=\varphi(x,x_0,y_0)$都在$[a,b]$上存在，且有

$$|\varphi(x,x_0,y_0)-\varphi(x,x_0^*,y_0^*)|<\varepsilon,\quad x\in[a,b],$$

则称初值问题$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y), y(x_0)=y_0$的解$y=\varphi(x,x_0,y_0)$在点

(x_0^*, y_0^*)连续依赖于初值 x_0, y_0.

2. **贝尔曼引理** 设 $y(x)$为区间$[a,b]$上非负的连续函数，$a \leqslant x_0 \leqslant b$. 若存在$\delta \geqslant 0, k \geqslant 0$，使得 $y(x)$满足不等式

$$y(x) \leqslant \delta + k \left| \int_{x_0}^{x} y(\tau) \mathrm{d}\tau \right|, \quad x \in [a,b],$$

则 $y(x)$就满足不等式

$$y(x) \leqslant \delta \mathrm{e}^{k(x-x_0)}, \quad x \in [a,b].$$

3. **定理2.4(解对初值连续依赖性定理)** 设$f(x,y)$在区域D内连续，且关于y满足李普希兹条件. 如果$(x_0^*, y_0^*) \in D$，初值问题$y' = f(x,y), y(x_0^*) = y_0^*$ 有解 $y = \varphi(x, x_0^*, y_0^*)$，且当$a \leqslant x \leqslant b$ 时，$(x, \varphi(x, x_0^*, y_0^*)) \in D$，则对任意$\varepsilon > 0$，存在$\delta > 0$，使对于满足

$$|x_0 - x_0^*| \leqslant \delta, \quad |y_0 - y_0^*| \leqslant \delta$$

的任意(x_0, y_0)，初值问题$y' = f(x,y), y(x_0) = y_0$ 的解$y = \varphi(x, x_0, y_0)$也在区间$[a,b]$上有定义，且有

$$|\varphi(x, x_0, y_0) - \varphi(x, x_0^*, y_0^*)| < \varepsilon.$$

4. **解对初值及参数的连续依赖性定理** 设 $f(x,y,\lambda) \in C(D_\lambda)$，且在 D_λ 内关于 y 满足局部李普希兹条件，则对任意$(x_0, y_0, \lambda) \in D_\lambda$，含参数$\lambda$的初值问题$y' = f(x,y,\lambda), y(x_0) = y_0$ 存在唯一的饱和解 $y = \varphi(x, x_0, y_0, \lambda)$，它的最大存在区间为$(\alpha(x_0, y_0, \lambda), \beta(x_0, y_0, \lambda))$，且$\varphi(x, x_0, y_0, \lambda)$作为$x, x_0, y_0, \lambda$的函数在$\Omega_\lambda$内连续. 其中

$$\Omega_\lambda \triangleq \{(x, x_0, y_0, \lambda) \mid \alpha(x_0, y_0, \lambda) < x < \beta(x_0, y_0, \lambda), (x_0, y_0, \lambda) \in D_\lambda\}.$$

疑 难 解 析

怎样理解解对初值的连续依赖性?

答 因为在一般情形，把初值点(x_0, y_0)视为固定的，然后研究微分方程经过初值点(x_0, y_0)的解. 显然，当初值点(x_0, y_0)发生变动时，微分方程的解也会随x_0和y_0的变动而变动，所以，可将微

分方程的解看作初值点(x_0,y_0)的函数. 解对初值的连续依赖性说明,在一定条件下,当初值点(x_0,y_0)的变动不大时,初值问题的解具有连续依赖性. 但是,应该认识到,解在有限闭区间上对初值的连续依赖性不能推出解在无限区间上对初值的连续依赖性. 后一问题将在第五章稳定性理论中予以讨论.

方法、技巧与典型例题分析

例 1 设$\varphi(t)$与$f(t)$是区间$[t_0,t_1]$上的非负连续函数,且满足

$$\varphi(t)\leqslant M+K\int_{t_0}^{t}\varphi(s)f(s)\mathrm{d}s,$$

其中M,K是正常数,证明:在区间$[t_0,t_1]$上,不等式

$$\varphi(t)\leqslant M\mathrm{e}^{K\int_{t_0}^{t}f(s)\mathrm{d}s}$$

成立.

证 对于$t\in[t_0,t_1]$,令

$$V(t)=M+K\int_{t_0}^{t}\varphi(s)f(s)\mathrm{d}s,$$

于是$V(t_0)=M,\varphi(t)\leqslant V(t)$. 又

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=K\varphi(t)f(t),$$

由题设知$f(t)$非负,从而有

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\leqslant KV(t)f(t).$$

将上式两端乘以$\mathrm{e}^{-K\int_{t_0}^{t}f(s)\mathrm{d}s}$,注意到

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{-K\int_{t_0}^{t}f(s)\mathrm{d}s}-KV(t)f(t)\mathrm{e}^{-K\int_{t_0}^{t}f(s)\mathrm{d}s}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[V(t)\mathrm{e}^{-K\int_{t_0}^{t}f(s)\mathrm{d}s}\right],$$

就得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[V(t)\mathrm{e}^{-K\int_{t_0}^{t}f(s)\mathrm{d}s}\right]\leqslant 0.$$

从t_0到t进行积分,得

$$V(t)\mathrm{e}^{-K\int_{t_0}^{t}f(s)\mathrm{d}s}-V(t_0)\leqslant 0,$$

即
$$V(t)\leqslant M\mathrm{e}^{-K\int_{t_0}^{t}f(s)\mathrm{d}s}.$$

此式称为格隆威尔-贝尔曼不等式.

当$M=0$时,由$\varphi(t)\leqslant M\mathrm{e}^{K\int_{t_0}^{t}f(s)\mathrm{d}s}$得知$\varphi(t)\equiv 0$. 利用它可以更方便地证明解的唯一性.

例 2 设$x=\varphi(t,x_0,y_0)$,$y=\psi(t,x_0,y_0)$是方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=xy+t^2,\\[2ex] 2\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-y^2\end{cases} \qquad ①$$

的解,且满足条件$\varphi(1;x_0,y_0)=x_0$,$\psi(1;x_0,y_0)=y_0$,试从解的表达式讨论解对初值x_0,y_0的连续依赖性.

解 由式①的第二式可得特解$y\equiv 0$,将其代入式①的第一式,解得$x=t^3/3+C$. 又由$y_0=0$,得$\psi(t,x_0,0)\equiv 0$,$\varphi(t,x_0,0)=t^3/3+x_0-1/3$. 显然,此时的解$\varphi,\psi$都是$x_0,y_0$的连续函数.

设$y\neq 0$,则由式①的第二式解得$y=\dfrac{2}{t+C_1}$,代入式①的第一式,得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{2}{t+C_1}x+t^2.$$

解得
$$\begin{aligned}x&=\mathrm{e}^{\int\frac{2}{t+C_1}\mathrm{d}t}\left[C_2+\int t^2\mathrm{e}^{-\int\frac{2}{t+C_1}\mathrm{d}t}\mathrm{d}t\right]\\&=(t+C_1)^2\left[C_2+\int\left(\frac{t}{t+C_1}\right)^2\mathrm{d}t\right]\\&=(t+C_1)^2\left[C_2+\int\left(1+\frac{C_1^2}{(t+C_1)^2}-\frac{2C_1}{t+C_1}\right)\mathrm{d}t\right]\\&=(t+C_1)^2\left[C_2+t-\frac{C_1^2}{t+C_1}-2C_1\ln(t+C_1)\right].\end{aligned}$$

再将初始条件$x(1)=x_0$,$y(1)=y_0$代入x与y的表达式,则由

$$y_0=\frac{2}{C_1+1}\Rightarrow C_1=\frac{2}{y_0}-1,$$

得 $$y=\psi(t,x_0,y_0)=\frac{2}{t+2/y_0-1}=\frac{2y_0}{2+y_0(t-1)}.$$

又由 $$x_0=(1+C_1)^2\left[C_2+1-\frac{C_1^2}{1+C_1}-2C_1\ln(1+C_1)\right]$$
$$=\frac{4}{y_0^2}\left[C_2-1-\frac{y_0(2/y_0-1)^2}{2}+2\left(1-\frac{2}{y_0}\right)\ln\frac{2}{y_0}\right],$$

解得 $$C_2=\frac{x_0y_0^2}{4}+1+\frac{y_0(2/y_0-1)^2}{2}+2\left(\frac{2}{y_0}-1\right)\ln\frac{2}{y_0}.$$

于是 $$x=\varphi(t,x_0,y_0)$$
$$=(t+C_1)^2\left[C_2+t-\frac{C_1^2}{t+C_1}-2C_1\ln(1+C_1)\right].$$

由 $\varphi(t,x_0,y_0)$ 与 $\psi(t,x_0,y_0)$ 的表达式显见 $\varphi(t,x_0,y_0)$ 与 $\psi(t,x_0,y_0)$ 关于 x_0,y_0 连续.

例3 设有积分方程

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,\tau)\varphi(\tau)\mathrm{d}\tau, \quad ①$$

其中 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数，$K(x,\tau)$ 是 $a\leqslant x\leqslant b,a\leqslant\tau\leqslant b$ 上的已知连续函数. 证明：当 $|\lambda|$ 足够小时（λ 是常数），方程①在 $[a,b]$ 上存在唯一的连续解.

证 (1) 先证解的存在性.

作逐步逼近函数序列

$$\varphi_0(x)=f(x),$$

$$\varphi_{n+1}(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,\tau)\varphi_n(\tau)\mathrm{d}\tau,\quad n=0,1,2,\cdots.$$

如果在某一步有 $\varphi_{n+1}(x)=\varphi_n(x)$，则此 $\varphi_n(x)$ 即为方程①的解. 否则，继续下去，可以证明 $\{\varphi_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛. 事实上，因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，所以有 $M=\max\limits_{x\in[a,b]}|f(x)|$. 又因为 $K(x,\xi)$ 在域 $R:a\leqslant x\leqslant b,a\leqslant\xi\leqslant b$ 上连续，所以有 $N=\max\limits_{a\leqslant x,\xi\leqslant b}|K(x,\xi)|$. 从而，对一切 n，$\varphi_{n+1}(x)$ 均为 $[a,b]$ 上的连续函数. 考虑级数

$$\varphi_0(x)+\sum_{i=1}^{\infty}[\varphi_i(x)-\varphi_{i-1}(x)], \quad ②$$

其部分和为

$$\varphi_0(x)+\sum_{i=1}^{n}[\varphi_i(x)-\varphi_{i-1}(x)]=\varphi_n(x).$$

因为 $\quad |\varphi_1(x)-\varphi_0(x)|\leqslant|\lambda|N(b-a)M,\quad x\in[a,b],$

$$|\varphi_2(x)-\varphi_1(x)|\leqslant|\lambda|\int_a^b|K(x,\xi)||\varphi_1(x)-\varphi_0(x)|\mathrm{d}x$$

$$\leqslant M|\lambda|^2N^2(b-a)^2.$$

设 $\quad |\varphi_n(x)-\varphi_{n-1}(x)|\leqslant M|\lambda|^nN^n(b-a)^n,$

所以 $\quad |\varphi_{n+1}(x)-\varphi_n(x)|\leqslant M|\lambda|^{n+1}N^{n+1}(b-a)^{n+1}.$

故由数学归纳法知，对一切自然数 i，都有

$$|\varphi_i(x)-\varphi_{i-1}(x)|\leqslant M|\lambda|^iN^i(b-a)^i.$$

当 $|\lambda|$ 足够小时（如使 $|\lambda N(b-a)|<1$ 时），级数 $\sum_{i=1}^{\infty}M|\lambda|^iN^i(b-a)^i$ 显然收敛．由 M-判别法知，级数②在 $a\leqslant x\leqslant b$ 上一致收敛，可记 $\varphi(x)=\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)$．再由 $\varphi_n(x)$ 的连续性知，$\varphi(x)$ 在 $a\leqslant x\leqslant b$ 上连续，又 $K(x,\xi)$ 在 R 上连续，故可在积分号下取极限，即

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)=f(x)+\lambda\int_a^bK(x,\xi)\lim_{n\to\infty}\varphi_{n-1}(\xi)\mathrm{d}\xi,$$

得 $\quad \varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^bK(x,\xi)\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi.$

从而，知 $\varphi(x)$ 为原方程的解．

(2) 再证解的唯一性．

设 $\psi(x)$ 是原方程的解，则有

$$\psi(x)\equiv f(x)+\lambda\int_a^bK(x,\xi)\psi(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

令 $A=\max|\varphi(x)-\psi(x)|$，则有

$$|\varphi(x)-\psi(x)|\leqslant|\lambda|\int_a^b|K(x,\xi)||\varphi(\xi)-\psi(\xi)|\mathrm{d}\xi\leqslant|\lambda|NA(b-a),$$

于是 $\quad |\varphi(x)-\psi(x)|\leqslant|\lambda|\int_a^b|K(x,\xi)||\varphi(\xi)-\psi(\xi)|\mathrm{d}\xi$

$$\leqslant|\lambda|\int_a^bN|\lambda|NA(b-a)\mathrm{d}\xi\leqslant|\lambda|^2N^2A(b-a).$$

如此反复代入，递推可得

$$|\varphi(x)-\psi(x)|\leqslant|\lambda|^n N^n A(b-a)$$

对一切自然数 n 成立. 但 $|\lambda(b-a)N|<1$，所以 $A|\lambda|^n(b-a)^n\to 0$（当 $n\to\infty$）时，有

$$\varphi(x)\equiv\psi(x).$$

综上所述可知，当 $|\lambda|$ 足够小时 $\left(\text{如 } |\lambda|<\dfrac{1}{N(b-a)}\text{ 时}\right)$ 方程① 在 $[a,b]$ 上存在唯一解.

第四节 解对初值的可微性

主 要 内 容

1. **定理 2.5**（解对初值的可微性） 如果函数 $f(x,y)$ 以及 $f'_y(x,y)$ 在区域 D 内连续，则初值问题 $y'=f(x,y),y(x_0)=y_0$ 的解 $\varphi(x,x_0,y_0)$ 作为 x,x_0,y_0 的函数，在它有定义的范围内有连续偏导数 $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y_0},\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_0}$.

2. **定义 2.2** 如果对于满足 $C_0<C<C_1$ 的任意 C，函数 $y=\varphi(x,C)$ 是方程 $y'=f(x,y),(x,y)\in G$ 的解，且 $y=\varphi(x,C)$ 的曲线在区域 G 内；又对于任意点 $(x_0,y_0)\in G$，存在 $C:C_0<C<C_1$，使得解 $y=\varphi(x,C)$ 满足初始条件 $y(x_0)=y_0$，则称含有任意常数 C 的函数 $y=\varphi(x,C)$ 是 $y'=f(x,y)$ 在区域 G 上的通解.

疑 难 解 析

什么是变分方程？

答 若 $f(x,y),f'_y(x,y)$ 在区域 D 内连续，则对任意点 $(x_0,y_0)\in D$，初值问题 $y'=f(x,y),y(x_0)=y_0$ 存在唯一的饱和解

$y=\varphi(x,x_0,y_0)$在Ω内连续可微，其中

$$\Omega \triangleq \{(x,x_0,y_0) \mid \alpha(x_0,y_0)<x<\beta(x_0,y_0),(x_0,y_0)\in D\}$$

且$\dfrac{\partial \varphi(x,x_0,y_0)}{\partial x_0}$，$\dfrac{\partial \varphi(x,x_0,y_0)}{\partial y_0}$分别满足下列初值问题：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\partial f(x,\varphi(x,x_0,y_0))}{\partial y}z,\\ z(x_0)=-f(x_0,y_0),\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\partial f(x,\varphi(x,x_0,y_0))}{\partial y}z,\\ z(x_0)=-1,\end{cases}$$

方程$\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=f'_y(x,\varphi(x,x_0,y_0))z$称为方程$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y)$对解$\varphi(x,x_0,y_0)$的变分方程.

方法、技巧与典型例题分析

本节要求正确地理解定理，掌握利用定理与公式求解一些简单问题.

例1 若线性方程$y'+p(x)y=0$满足初始条件$y(x_0)=y_0$的解为$y(x,x_0,y_0)$，不解方程，直接求出

$$\frac{\partial y(x,x_0,y_0)}{\partial x_0},\quad \frac{\partial y(x,x_0,y_0)}{\partial y_0}.$$

解 方程写为$y'=-p(x)y$. 则由解对初值的微商公式

$$\frac{\partial \varphi(x,x_0,y_0)}{\partial y_0}=\mathrm{e}^{\int_{x_0}^{x} f'_y(\tau,\varphi(\tau,x_0,y_0))\mathrm{d}\tau}, \qquad ①$$

$$\frac{\partial \varphi(x,x_0,y_0)}{\partial x_0}=-f(x_0,y_0)\mathrm{e}^{\int_{x_0}^{x} f'_y(\tau,\varphi(\tau,x_0,y_0))\mathrm{d}\tau}, \qquad ②$$

直接得
$$\frac{\partial y(x,x_0,y_0)}{\partial x_0}=p(x_0)y_0\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x} p(\tau)\mathrm{d}\tau},$$

$$\frac{\partial y(x,x_0,y_0)}{\partial y_0}=\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x} p(\tau)\mathrm{d}\tau}.$$

例2 若线性方程 $y'+p(x)y=q(x)$ 满足初始条件 $y(x_0)=y_0$ 的解为 $y(x,x_0,y_0)$，不解方程，直接求出

$$\frac{\partial y(x,x_0,y_0)}{\partial x_0},\quad \frac{\partial y(x,x_0,y_0)}{\partial y_0}.$$

解 因为 $y'=-p(x)y+q(x)$，则由式①与式②得

$$\frac{\partial y(x,x_0,y_0)}{\partial x_0}=[p(x_0)y_0-q(x_0)]e^{-\int_{x_0}^{x}p(\tau)d\tau},$$

$$\frac{\partial y(x,x_0,y_0)}{\partial y_0}=e^{-\int_{x_0}^{x}p(\tau)d\tau}.$$

例3 设给定方程 $y'=\sin(xy\lambda)$，求

$$\left.\frac{\partial y(x,x_0,y_0,\lambda)}{\partial x_0}\right|_{\substack{x_0=0\\ y_0=0}},\quad \left.\frac{\partial y(x,x_0,y_0,\lambda)}{\partial y_0}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}},\quad \left.\frac{\partial y(x,x_0,y_0,\lambda)}{\partial \lambda}\right|_{\substack{x_0=0\\ y_0=0}}.$$

解 当 $f(x,y,\lambda)$ 在 D 上存在且连续时，初值问题 $y'=f(x,y,\lambda)$，$y(x_0)=y_0$ 的解 $y=y(x,x_0,y_0,\lambda)$ 对参数与初值有连续的偏导数，且

$$\frac{\partial y(x,x_0,y_0,\lambda)}{\partial x_0}=-f(x_0,y_0,\lambda)e^{\int_{x_0}^{x}f'_y(\tau,x_0,y_0,\lambda)d\tau},$$

$$\frac{\partial y(x,x_0,y_0,\lambda)}{\partial y_0}=e^{\int_{x_0}^{x}f'_y(\tau,x_0,y_0,\lambda)d\tau},$$

$$\frac{\partial y(x,x_0,y_0,\lambda)}{\partial \lambda}=e^{\int_{x_0}^{x}f'_y(\tau,x_0,y_0,\lambda)d\tau}\int_{x_0}^{x}f'_\lambda(\tau,x_0,y_0,\lambda)\cdot e^{-\int_{t_0}^{t}f'_y(\tau,x_0,y_0,\lambda)d\tau}dt.$$

因为

$$f(x,y,\lambda)=\sin(xy\lambda),$$

$$f'_y(x,y,\lambda)=x\lambda\cos(xy\lambda),\quad f'_\lambda(x,y,\lambda)=xy\cos(xy\lambda),$$

$f(x,y,\lambda)$ 与 $f'_y(x,y,\lambda)$ 在全平面连续，故可直接应用公式得

$$f(0,0,\lambda)=0,\quad \left.\frac{\partial y(x,x_0,y_0,\lambda)}{\partial x_0}\right|_{\substack{x_0=0\\ y_0=0}}=0,$$

$$\left.\frac{\partial y(x,x_0,y_0,\lambda)}{\partial y_0}\right|_{\substack{x_0=0\\ y_0=0}}=e^{\int_0^x\lambda\tau\cos(\tau,y(\tau,0,0,\lambda))d\tau}$$

$$=e^{\int_0^x \lambda\tau\cos(\tau,0,\lambda)d\tau}=e^{\int_0^x \lambda\tau d\tau}=e^{-\lambda x^2/2},$$

$$\left.\frac{\partial y(x,x_0,y_0,\lambda)}{\partial\lambda}\right|_{\substack{x_0=0\\y_0=0}}=e^{\int_0^x \lambda\tau d\tau}\int_0^x xy\cos(\tau,0,\lambda)d\tau e^{-\int_{t_0}^t \lambda\tau d\tau}$$

$$=e^{\int_0^x \lambda\tau d\tau}\cdot 0\cdot e^{-\int_{t_0}^t \lambda\tau d\tau}=0.$$

例 4 若方程 $y'=f(x,y)$ 的右端函数是连续可微的，证明：

$$\frac{\partial\varphi(x,x_0,y_0)}{\partial x_0}+\frac{\partial\varphi(x,x_0,y_0)}{\partial y_0}f(x_0,y_0)\equiv 0,$$

其中 $y=\varphi(x,x_0,y_0)$ 是方程 $y'=f(x,y)$，$y(x_0)=y_0$ 的解.

证 因为 $y=\varphi(x,x_0,y_0)$ 是 x,y 的连续函数且可微，则由解的唯一性知，由初值确定的积分曲线经过点 (x_0,y_0)，所以有 $y_0=\varphi(x_0,x,y)$. 即从方程 $y=\varphi(x,x_0,y_0)$ 可以唯一地解出初值 y_0，而且右端有对 x,y 的连续偏导数. 积分曲线 $y_0=\varphi(x_0,x,y)$ 可视作方程的解所确定的隐函数，以 $y_0=\varphi(x_0,x,y)$ 代入 $y=\varphi(x,x_0,y_0)$ 中，即得关于 x_0 的恒等式. 将 $y=\varphi(x,x_0,y_0)$ 对 x_0 求导，得

$$\frac{\partial\varphi(x,x_0,y_0)}{\partial x_0}+\frac{\partial\varphi(x,x_0,y_0)}{\partial y_0}\frac{d\varphi(x_0,x,y)}{dx_0}=0.$$

由于
$$\frac{d\varphi(x_0,x,y)}{dx_0}\equiv f(x_0,y_0),$$

所以，证得

$$\frac{\partial\varphi(x,x_0,y_0)}{\partial x_0}+\frac{\partial\varphi(x,x_0,y_0)}{\partial y_0}f(x_0,y_0)\equiv 0.$$

例 5 对第三节例 1 分别从变分方程组及解的表达式求出 $\frac{\partial\varphi(t,3,2)}{\partial y_0}$.

解 (1) 一般的变分方程组为

$$\frac{dz_1}{dt}=\frac{\partial f_1}{\partial x}(t,\varphi(t,x_0,y_0),\psi(t,x_0,y_0))z_1$$

$$+\frac{\partial f_1}{\partial y}(t,\varphi(t,x_0,y_0),\psi(t,x_0,y_0))z_2,$$

$$\frac{dz_2}{dt}=\frac{\partial f_2}{\partial x}(t,\varphi(t,x_0,y_0),\psi(t,x_0,y_0))z_1$$

$$+\frac{\partial f_2}{\partial y}(t,\varphi(t,x_0,y_0),\psi(t,x_0,y_0))z_2,$$

其中 $$z_1=\frac{\partial\varphi}{\partial y}(t,x_0,y_0),\quad z_2=\frac{\partial\psi}{\partial y}(t,x_0,y_0),$$

$$f_1=xy+t^2,\quad f_2=-\frac{1}{2}y^2,$$

则问题归结为求解下述方程组的初值问题：

$$\frac{\mathrm{d}z_1}{\mathrm{d}t}=\psi(t,x_0,y_0)z_1+\varphi(t,x_0,y_0)z_2$$

$$=\frac{2z_1}{t+2/y_0-1}+\varphi(t,x_0,y_0)z_2, \quad ①$$

$$\frac{\mathrm{d}z_2}{\mathrm{d}t}=-\psi(t,x_0,y_0)=-\frac{2z_1}{t+2/y_0-1}. \quad ②$$

$$z_1|_{t=1}=0,\quad z_2|_{t=1}=1.$$

由式②解得 $$z_2=\frac{4}{y_0^2(t+2/y_0-1)^2}.$$

代入式①得未知函数 z_1 的一阶方程的初值问题：

$$\frac{\mathrm{d}z_1}{\mathrm{d}t}=\frac{2z_1}{t+2/y_0-1}+\varphi(t,x_0,y_0)\frac{4}{y_0^2(t+2/y_0-1)^2},$$

$$z_1|_{t=1}=0.$$

解得 $$z_1(t,3,2)=\frac{y_0^2}{4}\left(t+\frac{2}{y_0}-1\right)^2\int_0^t\varphi(s,3,2)\frac{4}{y_0(s+2/y_0-1)^2}$$

$$\times\frac{4}{(s+2/y_0-1)^2y_0^2}\mathrm{d}s$$

$$=t^2\int_1^t s^2(s+2)\frac{1}{s^4}\mathrm{d}s=t^2\int_1^t\left(\frac{1}{s}+\frac{2}{s^2}\right)\mathrm{d}s$$

$$=t^2\left(\ln t-\frac{2}{t}+2\right)=t^2\ln t+2t^2-2t.$$

(2) 直接对解的表达式求导，得

$$\left.\frac{\partial\varphi(t,x_0,y_0)}{\partial y_0}\right|_{x_0=3,y_0=2}$$

$$=2(t+C_1)\frac{\mathrm{d}C_1}{\mathrm{d}y_0}\left[C_2+t-\frac{C_1^2}{t+C_1}-2C_1\ln(t+C_1)\right]_{\substack{x_0=3\\y_0=2}}+(t+C_1)^2$$

$$\left\{\frac{\partial C_2}{\partial y_0}-\left[\frac{2C_1}{t+C_1}-\frac{C_1^2}{(t+C_1)^2}\right]\frac{\mathrm{d}C_1}{\mathrm{d}y_0}-\left[2\ln(C_1+t)+\frac{2C_1}{t+C_1}\right]\frac{\mathrm{d}C_1}{\mathrm{d}y_0}\right\}_{\substack{x_0=3\\y_0=2}}$$

$$=-t\left(C_2\Big|_{\substack{x_0=3\\y_0=2}}+t\right)+t^2\left[\frac{\partial C_2}{\partial y_0}\Big|_{\substack{x_0=3\\y_0=2}}-2\ln t\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$$

$$=-2t+t^2(2+\ln t)=t^2\ln t+2t(t-1).$$

下面介绍一些常见形式的偏微分公式.

若线性方程$y'+p(x)y=0$的满足初始条件$y(x_0)=y_0$的解为$\varphi(x,x_0,y_0)$,则

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\varphi(x,x_0,y_0)}{\partial x_0}=p(x_0)y_0\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x}p(t)\mathrm{d}t},\\ \dfrac{\partial\varphi(x,x_0,y_0)}{\partial y_0}=\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x}p(t)\mathrm{d}t}.\end{cases}\qquad ①$$

若线性方程$y'+p(x)y=q(x)$的满足初始条件$y(x_0)=y_0$的解为$\varphi(x,x_0,y_0)$,则

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\varphi(x,x_0,y_0)}{\partial x_0}=[p(x_0)y_0-q(x_0)]\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x}p(t)\mathrm{d}t},\\ \dfrac{\partial\varphi(x,x_0,y_0)}{\partial y_0}=\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x}p(t)\mathrm{d}t}.\end{cases}\qquad ②$$

若黎卡提方程$y'=p(x)y^2+q(x)y+r(x)$满足初始条件$y(x_0)=y_0$的解为$\varphi(x,x_0,y_0)$,则有

$$\frac{\partial\varphi(x,x_0,y_0)}{\partial x_0}\Big|_{x=x_0,y=y_0}=-p(x_0)y_0^2-q(x_0)y_0-r(x_0),$$

$$\frac{\partial\varphi(x,x_0,y_0)}{\partial y_0}\Big|_{x=x_0,y=y_0}=1.$$

例6 设$\varphi(x,x_0,y_0)$是方程$xy'-x\sin\dfrac{y}{x}-y=0$的满足初始条件$\varphi(x_0,x_0,y_0)=y_0$的解,讨论解对初值$x_0,y_0$的连续性,并求出

$$\frac{\partial\varphi(x,x_0,y_0)}{\partial x_0}\Big|_{x=x_0},\quad \frac{\partial\varphi(x,x_0,y_0)}{\partial y_0}\Big|_{x=x_0}.$$

解 将方程化为$y'-\sin\dfrac{y}{x}-\dfrac{y}{x}=0$,则由式①得

$$\left.\frac{\partial\varphi(x,x_0,y_0)}{\partial x_0}\right|_{x=x_0}=-\sin\frac{y_0}{x_0}-\frac{y_0}{x_0},$$

$$\left.\frac{\partial\varphi(x,x_0,y_0)}{\partial y_0}\right|_{x=x_0}=1.$$

因为$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\sin\frac{y}{x}+\frac{y}{x}$，$f(x,y)=\sin\frac{y}{x}+\frac{y}{x}$，$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x}+\frac{1}{x}$在除原点外的整个平面连续，所以可以证明关于$y$满足李普希兹条件，从而解对初值$x_0$，$y_0$是连续的. 具体证明过程读者可以自己补充.

第三章　线性微分方程

线性微分方程是常微分方程理论中一类重要的方程．本章主要内容是研究二阶线性微分方程的一般理论与方法，并将所得结果推广到n阶线性方程上．

第一节　线性方程的一般性质

主要内容

1．n **阶线性微分方程**的一般形式为

$$a_0(x)y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=\varphi(x). \quad ①$$

当$a_0(x)$在某区间(a,b)上恒不为零时，可写为

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+p_2(x)y^{(n-2)}+\cdots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y=f(x). \quad ②$$

2．**定理3.1**　如果函数$f(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)})$在点$P_0(x_0,y_0,y_0',\cdots,y_0^{(n-1)})$的某邻域对$(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)})$连续，且关于变量$y,y',\cdots,y^{(n-1)}$满足李普希兹条件，即存在$N>0$，使得在上述邻域中有

$$|f(x,y_1,y_1',\cdots,y_1^{(n-1)})-f(x,y_2,y_2',\cdots,y_2^{(n-1)})|$$
$$\leqslant N(|y_1-y_2|+|y_1'-y_2'|+\cdots+|y_1^{(n-1)}-y_2^{(n-1)}|),$$

则在x_0的某邻域上，$y^{(n)}=f(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)})$必然存在唯一的满足初始条件$y(x_0)=y_0,y'(x_0)=y_0',\cdots,y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}$的解$y=\varphi(x)$.

3．**定理3.2**　如果方程①的系数$p_k(x)$ $(k=1,2,\cdots,n)$及其右

端函数$f(x)$在区间$[a,b]$上有定义且连续，则对于$[a,b]$上的任一x及任意给定的$y_0,y'_0,\cdots,y_0^{(n-1)}$，方程①的满足初始条件$y(x_0)=y_0,y'(x_0)=y'_0,\cdots,y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}$的解$y=\varphi(x)$在$[a,b]$上存在且唯一.

4. $y_n^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y=0$ ③

称为n**阶线性齐次微分方程**，式②称为n**阶线性非齐次微分方程**. 式③也称为式②的对应齐次方程.

5. 定义

$$L[y]=y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y, \quad ④$$

称符号L为**线性微分算子**.

非齐次方程可写为$L[y]=f(x)$，齐次方程可写为$L[y]=0$.

算子L具有如下性质：

(1) $L[ky]=kL[y]$；　　(2) $L[y_1+y_2]=L[y_1]+L[y_2]$.

疑难解析

1. n阶线性非齐次微分方程与对应的齐次微分方程有何关系？

答　当非齐次微分方程右端的函数$f(x)\equiv0$时，方程称为对应的齐次微分方程，它们的解之间有着紧密的联系. 由第一章第四节知，一阶线性非齐次方程$y'=p(x)y+q(x)$的通解$y=Ce^{\int p(x)dx}+e^{\int p(x)dx}\int q(x)e^{-\int p(x)dx}dx$，恰为对应齐次方程$y'=p(x)y$的通解$y=Ce^{\int p(x)dx}$与非齐次方程的一个特解之和. 对于$n$阶线性方程，这一性质依然成立，即非齐次方程②的通解恰为对应齐次方程③的通解与非齐次方程②的一个特解之和. 利用这个性质，可以使n阶线性非齐次方程的求解变得较为容易，尤其是常系数情形，这一性质将在第三节予以证明.

2. 怎样理解算子与线性微分算子？

答 算子表示一种运算关系，可以理解为“函数的函数”．例如线性微分算子L可以理解为对一个有n阶导数的函数$y(x)$取函数，即将$y(x)$与一个新的函数建立起一种对应关系：

$$L[y(x)]=y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y.$$

也可以说它是一个数学算子，以方式

$$L[\cdot]=\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}+p_1(x)\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}+\cdots+p_{n-1}(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+p_n(x)$$

作用于一个具有n阶导数的函数$y(x)$上．

算子概念与单变量函数的概念很相似．算子L把区间I上具有n阶导数的函数$y(x)$与定义在同一区间上的函数建立起对应关系，只不过因变量与自变量都是函数．从这个意义上讲，算子概念是普通函数概念的推广．因为本节中的算子所含运算是微分运算并具有线性，故称为线性微分算子．

方法、技巧与典型例题分析

熟悉n阶线性非齐次微分方程与齐次微分方程的概念，能对二阶线性方程进行验证并讨论方程的解．

例 1 证明：常系数线性微分方程$y''+a_1y'+a_2y=0$的任何一个解的导数仍是它的解．

证 设$y=f(x)$是方程的一个解，则对

$$f''(x)+a_1f'(x)+a_2f(x)=0$$

两边求导，得

$$f'''(x)+a_1f''(x)+a_2f'(x)\equiv0,$$

即
$$[f'(x)]''+a_1[f'(x)]'+a_2[f'(x)]\equiv0.$$

所以$f'(x)$仍然是$y''+a_1y'+a_2y=0$的解．

例 2 验证$y=C_1x^{-1}+C_2x^5$是微分方程$x^2y''-3xy'-5y=0$

定义在任一不包含零的区间$[a,b]$上的解. 若$x_0\neq 0$，y_0，y_0'是任意常数，证明：存在唯一一组数C_1，C_2，使得y满足条件$y(x_0)=y_0$，$y'(x_0)=y_0'$.

证 当$x\neq 0$时，$y'=-\frac{C_1}{x^2}+5C_2x^4$，$y''=\frac{2C_1}{x^3}+20C_2x^3$，代入微分方程，得

$$x^2\left(\frac{2C_1}{x^3}+20C_2x^3\right)-3x\left(-\frac{C_1}{x^2}+5C_2x^4\right)-5\left(\frac{C_1}{x}+C_2x^5\right)=0.$$

所以，$y=C_1x^{-1}+C_2x^5$是微分方程的解，定义在任一不包含$x=0$的区间$[a,b]$上.

将题给条件代入y，y'的表达式，得

$$\begin{cases}\dfrac{C_1}{x_0}+C_2x_0^5=y_0,\\ -\dfrac{C_1}{x_0^2}+5C_2x_0^4=y_0'.\end{cases}$$

因为上述方程组（关于C_1，C_2的）的系数行列式$D=6x_0^3\neq 0$，故C_1，C_2有唯一一组解C_1，C_2.

例3 证明：函数$y_1=x^2\sin x$，$y_2=0$均为方程

$$x^2y''-4xy'+(x^2+6)y=0$$

的满足条件$y(0)=0$，$y'(0)=0$的解. 并说明这与解的唯一性是否矛盾.

证 由
$$y_1'=2x\sin x+x^2\cos x,$$
$$y_1''=2\sin x+2x\cos x+2x\cos x-x^2\sin x$$
知
$$x^2y_1''-4xy_1'+(x^2+6)y'=0.$$
又由$y_2'=0$，$y_2''=0$知$x^2y_2''-4xy_1'+(x^2+6)y=0$，故$y_1=x^2\sin x$和$y_2=0$都是方程满足$y(0)=0$，$y'(0)=0$的解.

因为方程的标准形为

$$y''-\frac{4}{x}y'+\left(1+\frac{6}{x^2}\right)y=0,$$

其中$-\frac{4}{x}$与$\left(1+\frac{6}{x^2}\right)$在点$x=0$都不连续，因而不符合解的唯一性定理的要求，所以$y_1,y_2$均为方程的解与解的唯一性不矛盾.

例4 证明：若方程$y''+p(x)y'+q(x)y=0$定义在区间(a,b)内的解$y(x)$对任一$x_0\in(a,b)$，皆有$\lim\limits_{x\to x_0}y(x)=0$，则$y=0$在区间$(a,b)$内恒成立.

证 因为$y(x)$是已知方程在区间(a,b)内的解，所以$y(x)$必为(a,b)内的连续函数. 又对任一$x_0\in(a,b)$，$\lim\limits_{x\to x_0}y(x)=0$，所以$\lim\limits_{x\to x_0}y(x)=y(x_0)=0$. 由此表明：对任一$x_0\in(a,b)$，皆有$y(x_0)=0$，从而$y(x)=0$在$(a,b)$内恒成立.

例5 设$L[x(t)]=x''(t)-6x'(t)+5x(t)$，计算：

(1) $L[e^t]$；　(2) $L[e^{rt}]$；　(3) $L[\sin t]$；　(4) $L[t^2+t]$.

解 (1) $(e^t)'=e^t,(e^t)''=e^t$，故

$$L[e^t]=e^t-6e^t+5e^t=0.$$

(2) $(e^{rt})'=re^{rt},(e^{rt})''=r^2e^{rt}$，故

$$L[e^{rt}]=r^2e^{rt}-6re^{rt}+5e^{rt}=(r^2-6r+5)e^{rt}.$$

(3) $(\sin t)'=\cos t,(\sin t)''=-\sin t$，故

$$L[\sin t]=-\sin t-6\cos t+5\sin t=4\sin t-6\cos t.$$

(4) $(t^2+2t)'=2t+2,(t^2+2t)''=2$，则

$$L[t^2+2t]=2-6(2t+2)+5(t^2+2t)=5t^2-2t-10.$$

例6 设　$L[y(t)]=y''(t)+p(t)y'(t)+q(t)y(t)$，

且　$$L[t^2]=t^2+1,\quad L(t)=2t^2+2,$$

验证$y(t)=t-2t^2$是方程$y''(t)+p(t)y'(t)+q(t)y(t)=0$的根.

解 将$y(t)=t-2t^2$代入方程，由线性微分算子L的性质

$$L[y(t)]=L[t-2t^2]=L[t]-2L[t^2]$$
$$=2t^2+2-2(t^2+1)=0,$$

所以$y(t)=t-2t^2$是方程$y''(t)+p(t)y'(t)+q(t)y(t)=0$的根.

第二节　n 阶线性齐次微分方程

主要内容

本节先研究以下线性齐次方程的一般理论：

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y=0. \qquad ①$$

1. 线性齐次方程①的解的线性性质.

(1) 如果 y_1 是方程①的解：$L(y_1)\equiv 0$，则对任意常数 C，函数 $y=Cy_1$ 也是方程①的解.

(2) 如果 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 是方程①的解，则对任意 n 个常数 $C_1,C_2,\cdots,C_n$，线性组合

$$y=C_1y_1+C_2y_2+\cdots+C_ny_n=\sum_{k=1}^{n}C_ky_k$$

也是方程①的解.

2. **定义 3.1**　函数组 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 称为在区间 (a,b) 内是**线性相关**的，如果存在一组不全为零的常数 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，使得

$$\alpha_1y_1+\alpha_2y_2+\cdots+\alpha_ny_n=0 \qquad ②$$

在 (a,b) 内恒成立；反之，如果只当 $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_n=0$ 时，式②在 (a,b) 内恒成立，则称函数组 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 在 (a,b) 内**线性无关**.

由此得出：

(1) 若函数组 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 中有一个函数，例如 $y_k\equiv 0$ $(a<x<b)$，则 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 在 (a,b) 内线性相关；

(2) 若两个函数 y_1 与 y_2 之比 $\dfrac{y_1}{y_2}$ 在区间 (a,b) 有定义，则它们在 (a,b) 内线性无关等价于比式 $\dfrac{y_1}{y_2}$ 在 (a,b) 内不恒等于常数.

3. **定义 3.2**　设函数组 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 中每一个 $y_k(k=1,2,\cdots,n)$ 均有 $n-1$ 阶导数，则称行列式

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

为已知函数组的**朗斯基**(Wronski)**行列式**.

定理3.3 如果函数组$y_1,y_2,\cdots,y_n$在区间(a,b)线性相关,则它的朗斯基行列式在(a,b)内恒等于零.

推论3.1 如果函数组$y_1,y_2,\cdots,y_n$的朗斯基行列式在区间(a,b)内某一点x_0处不等于零,$W(x_0)\neq0$,则该函数组在(a,b)内线性无关.

定理3.4 如果$y_1,y_2,\cdots,y_n$是方程①定义在(a,b)内的n个线性无关的解,则它的朗斯基行列式$W(x)\neq0$在(a,b)上恒成立.

推论3.2 设$y_1,y_2,\cdots,y_n$是方程①定义在(a,b)内的n个解,如果存在$x_0\in(a,b)$,使得它的朗斯基行列式$W(x_0)=0$,则该解组在(a,b)内线性相关.

推论3.3 方程①的n个解$y_1,y_2,\cdots,y_n$在其定义区间(a,b)内线性无关的充要条件是,在(a,b)内存在点x_0,使得它的朗斯基行列式$W(x_0)\neq0$.

4. **定义3.3** 方程①的定义在(a,b)内的n个线性无关的解称为方程①的一个**基本解组**.

定理3.5 如果$y_1,y_2,\cdots,y_n$是方程①的一个基本解组,则对于方程①的任何一个解$y(x)$,均存在一组常数$C_1^{(0)},C_2^{(0)},\cdots,C_n^{(0)}$,使得

$$y(x)=C_1^{(0)}y_1+C_2^{(0)}y_2+\cdots+C_n^{(0)}y_n.$$

基本定理 如果$y_1,y_2,\cdots,y_n$是方程①的一个基本解组,则

$$y=C_1y_1+C_2y_2+\cdots+C_ny_n \tag{③}$$

包含了方程①的所有的解,其中$C_1,C_2,\cdots,C_n$为n个任意常数. 或者说式③是方程①的通解.

推论3.4 n阶齐次方程①的线性无关解的个数不超过n.

定理3.6 方程①总存在定义在(a,b)内的基本解组.

5. **定理3.7** 设$y_1,y_2,\cdots,y_n$是方程①的任意n个解，$W(x)$是它的朗斯基行列式，则对(a,b)内的任一点x_0，都有

$$W(x)=W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x}p_1(t)dt}. \tag{④}$$

式④称为**刘维尔(Lieuville)公式**.

(1) 方程①的解的朗斯基行列式$W(x)$如在(a,b)内某一点处为零，则在整个(a,b)内恒等于零.

(2) 方程①的解的朗斯基行列式$W(x)$在(a,b)内某一点处不等于零，则在整个(a,b)内恒不为零.

疑难解析

1. 怎样理解函数组$y_1,y_2,\cdots,y_n$的线性相关与线性无关?

答 函数组$y_1,y_2,\cdots,y_n$的线性相关与线性无关概念，实际上与线性代数中向量组中向量的线性相关与线性无关是一致的. 例如，在线性代数中，零向量与任何向量线性相关，而在函数组y_1，$y_2,\cdots,y_n$中，若$y_k\equiv 0$，则$y_1,y_2,\cdots,y_n$在(a,b)内线性相关. 又如，两个向量$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$的对应分量成比例，即$\boldsymbol{\alpha}/\boldsymbol{\beta}=\lambda$，则$\boldsymbol{\alpha}$与$\boldsymbol{\beta}$线性相关，而在函数组中，若$\frac{y_i}{y_j}=C$ $(i\neq j,C$ 为常数)，则y_i与y_j线性相关.

但是，要注意到：函数组的线性无关与线性相关依赖于所取的区间，这是与向量组的线性相关性不同的. 例如，函数$x_1(t)=|t|$和$x_2(t)=t$在区间$(-\infty,+\infty)$上是线性无关的，但分别在区间$(-\infty,0)$和$(0,+\infty)$上是线性相关的. 这是因为

$$\frac{x_1(t)}{x_2(t)}=\begin{cases}-1, & t<0,\\ 1, & t>0\end{cases}$$

在区间$(-\infty,+\infty)$上不是常数，而分别在$(-\infty,0)$与$(0,+\infty)$上是常数.

2. 关于齐次方程①的 n 个解 $y_1,y_2,\cdots,y_n$，有哪些等价命题？

答 设 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 是方程①的 n 个解，则下列命题等价：

(1) 方程①的通解为 $y(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}C_k y_k$，其中 $C_k(k=1,2,\cdots,n)$ 为 n 个任意常数；

(2) $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 是方程①的一个基本解组；

(3) $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 在 (a,b) 内是线性无关的；

(4) 在 (a,b) 内有一点 x_0，朗斯基行列式 $W(x_0)\neq 0$；

(5) 在 (a,b) 内任一点 x，朗斯基行列式 $W(y_1,y_2,\cdots,y_n)\neq 0$.

3. 线性齐次方程与基本解组有什么关系？

答 齐次方程①在其系数 $p_i(x)$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 的连续区间 (a,b) 内总存在基本解组 $y_1,y_2,\cdots,y_n$，而且有无穷多个.

反之，若 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 是 n 个定义在 (a,b) 内，且有直到 n 阶连续导数的函数，同时其朗斯基行列式 $W(x)\neq 0$，则

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n & y \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' & y' \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \cdots & y_n^{(n)} & y^{(n)} \end{vmatrix}=0 \qquad ⑤$$

是以 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 为基本解组的 n 阶线性齐次方程，即线性齐次方程式由其基本解组唯一确定.

4. 怎样求与二阶线性齐次方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ 的已知解 y_1 线性无关的另一特解？

答 设 y_1 是 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ 的一个非零特解，y 是与 y_1 线性无关的任一特解，则有

$$\begin{vmatrix} y_1 & y \\ y_1' & y' \end{vmatrix}=Ce^{-\int p(x)dx}\Rightarrow y_1y'-yy_1'=Ce^{-\int p(x)dx}.$$

用 $\dfrac{1}{y_1^2}$ 乘上式两端，得

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y}{y_1}\right)=\frac{C}{y_1^2}e^{-\int p(x)dx},$$

即 $$\frac{y}{y_1}=\int\frac{Ce^{-\int p(x)\mathrm{d}x}}{y_1^2}\mathrm{d}x+C_1,$$

得 $$y=y_1\int\frac{1}{y_1^2}e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\ (\text{取}\ C_1=0,C=1). \quad ⑥$$

因为 $e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\neq 0$，所以 y 与 y_1 线性无关. 故二阶线性齐次微分方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ 的通解为

$$y=C_1y_1+C_2y_1\int\frac{1}{y_1^2}e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x.$$

5. 怎样求 $y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y=0$ 的通解？

答 求 n 阶变系数线性微分方程的通解是比较困难的，下面对二阶变系数齐次线性微分方程的情形作一简单说明. 因为二阶线性齐次微分方程的通解由两个线性无关的解线性组合构成，所以找出方程的一个特解是至关重要的，常从以下几方面去做.

(1) 从方程的特点考察. 若方程各项系数之和等于零，则 $y=e^x$ 必为方程的一个特解. 这是因为 e^x 的各阶导数均为 e^x，代入方程后恒为零.

例如，方程 $(x-1)y''-xy'+y=0$ 与方程 $(1+2x-x^2)y'+(x^2-3)y'+2(1-x)y=0$ 都有特解 $y_1=e^x$.

(2) 从方程形式考察. 观察方程的形式特点，确定特解形式.

例如，方程 $y''+y=0$，得出 $y''=-y$，则由三角函数的导数知，$y_1=\sin x$，$y_2=\cos x$ 是方程的两个特解.

(3) 尝试法. 根据方程系数的特点，推测特解的形式，经代入尝试后确定方程的特解.

例如，方程 $(x-1)y''-xy'+y=0$ 的所有系数都是多项式，可以设想方程必有多项式解. 将不同次多项式逐个代入试验，可以确定 $y_1=x$ 是方程的一个特解.

在确定了方程的一个特解 y_1 以后，可以利用疑难解析 4 中的方法，求得方程的另一个与 y_1 线性无关的特解

$$y_2=y_1\int\frac{1}{y_1^2}e^{-\int p(x)dx}dx.$$

因为y_1与y_2线性无关，故齐次方程$y''+p(x)y'+q(x)y=0$的通解$y=C_1y_1+C_2y_2$.

方法、技巧与典型例题分析

读者必须熟悉n阶线性齐次方程的一般理论，对朗斯基行列式、基本解组、刘维尔公式能够熟练运用，才能正确地讨论n阶线性齐次方程的有关问题.

例1 试讨论下列各函数组在它们的定义区间上是线性相关的还是线性无关的.

(1) $\sin2t,\cos t,\sin t$;　　(2) $x,\tan x$;

(3) $x^2-x+3,2x^2+x,2x+4$;　　(4) e^t,te^t,t^2e^t.

解 一般利用朗斯基行列式在定义区间内是否恒等于零来判别. 但也可以根据定义，由任何两个函数在区间内之比式是否恒等于常数来判别.

(1) 函数组$\sin2t,\cos t,\sin t$的朗斯基行列式为

$$W(t)=\begin{vmatrix}\sin2t & \cos t & \sin t\\ 2\cos2t & -\sin t & \cos t\\ -4\sin2t & -\cos t & -\sin t\end{vmatrix}=-3\sin2t,$$

显然，$t_0=\frac{\pi}{4}$时，$W\left(\frac{\pi}{4}\right)=-3\neq0$，所以函数组在定义区间$(-\infty,+\infty)$上线性无关.

(2) 函数组$x,\tan x$的朗斯基行列式为

$$W(x)=\begin{vmatrix}x & \tan x\\ 1 & 1/\cos^2x\end{vmatrix}=\frac{2x-\sin x}{2\cos^2x},$$

显然，$x_0=\pi$时，$W(\pi)=\pi\neq0$，所以函数组在区间$\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$，$k\in\mathbf{Z}$上线性无关.

(3) 函数组 $x^2-x+3, 2x^2+x, 2x+4$ 的朗斯基行列式为

$$W(x)=\begin{vmatrix} x^2-x+3 & 2x^2+x & 2x+4 \\ 2x-1 & 4x+1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}=48\neq 0,$$

所以函数组在 $(-\infty,+\infty)$ 上线性无关.

(4) 函数组 e^t, te^t, t^2e^t 的朗斯基行列式为

$$W(t)=\begin{vmatrix} e^t & te^t & t^2c^t \\ e^t & (1+t)e^t & (t^2+2t)e^t \\ e^t & (2+t)e^t & (t^2+4t+2)e^t \end{vmatrix}=2e^{3t}\neq 0,$$

所以函数组在 $(-\infty,+\infty)$ 上线性无关.

例 2 用朗斯基行列式证明: e^x, e^{-x} 是方程 $y''-y=0$ 的基本解组.

证 容易验证 e^x, e^{-x} 是方程 $y''-y=0$ 的解. 又有

$$W(x)=\begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix}=-2\neq 0,$$

所以, $y_1=e^x, y_2=e^{-x}$ 是 $y''-y=0$ 的基本解组.

例 3 已知定义在区间 $[-1,1]$ 上的两个函数 $f(x)=x^3, g(x)=x^2|x|$, 证明:

(1) 在 $[-1,1]$ 上, $f(x), g(x)$ 的朗斯基行列式恒等于零;

(2) $f(x), g(x)$ 在 $[-1,1]$ 上线性无关. 并说明这与定理 3.4 的推论 3 是否矛盾.

证 因为 $f(x)=x^3$, 而

$$g(x)=\begin{cases} x^3, & 0\leqslant x\leqslant 1, \\ -x^3, & -1\leqslant x<0. \end{cases}$$

(1) 在 $[-1,0)$ 与 $[0,1]$ 上, 分别有

$$W_1(x)=\begin{vmatrix} x^3 & -x^3 \\ 3x^2 & -3x^2 \end{vmatrix}=0, \quad W_2(x)=\begin{vmatrix} x^3 & x^3 \\ 3x^2 & 3x^2 \end{vmatrix}=0,$$

所以, $f(x), g(x)$ 的朗斯基行列式在 $[-1,1]$ 上恒等于零.

(2) 在 $[-1,0)$ 与 $[0,1]$ 上, 分别有

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x^3}{-x^3}=-1,\quad \frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x^3}{x^3}=1,$$

所以，$f(x)$，$g(x)$在$[-1,1]$上线性无关.

这与定理3.4的推论3不矛盾，因为$f(x)$与$g(x)$并不是某个二阶齐次线性微分方程的解.

例4 设在方程$y''+p(x)y'+q(x)y=0$中，$p(x)$在某区间I上连续且恒不为零，试证它的任意两个线性无关的解的朗斯基行列式是区间I上的严格单调函数.

证 设$y_1(x)$，$y_2(x)$是题给方程在区间I上的两个线性无关的解，则有刘维尔公式

$$W(x)=W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x}p(\tau)d\tau}\quad (x_0\in I),$$

其中，$W(x_0)\neq 0$. 讨论

$$\frac{dW}{dx}=-W(x_0)p(x)e^{-\int_{x_0}^{x}p(\tau)d\tau}$$

的符号. 因为$W(x_0)\neq 0$，$p(x)$在I上恒不为零（因而保号），$e^{-\int_{x_0}^{x}p(\tau)d\tau}>0$，所以$\frac{dW}{dx}$在$I$上保号，从而，$W(x)$在$I$上严格单调.

例5 证明：二阶线性齐次方程的任意两个线性无关解组的朗斯基行列式之比是一个不为零的常数.

证 设$(y_1^{(1)}(x),y_2^{(1)}(x))$，$(y_1^{(2)}(x),y_2^{(2)}(x))$是二阶线性齐次方程的任意两个在区间$I$上的线性无关解组，其朗斯基行列式分别为$W_1(x)$，$W_2(x)$，则有刘维尔公式

$$W_1(x)=W_1(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x}p(\tau)d\tau},$$

$$W_2(x)=W_2(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x}p(\tau)d\tau},$$

其中，$x_0\in I$，$W_1(x_0)\neq 0$，$W_2(x_0)\neq 0$，所以

$$\frac{W_1(x)}{W_2(x)}=\frac{W_1(x_0)}{W_2(x_0)}\neq 0.$$

例6 已知方程$(x-1)y''-xy'+y=0$的一个解$y_1=x$，求其通解.

解 由疑难解析 4 知，由式⑥可得方程 $(x-1)y''-xy'+y=0$ 的与 $y_1=x$ 线性无关的解为

$$y_2=y_1\int\frac{1}{y_1^2}\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x=x\int\frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{-\int\frac{-x}{x-1}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$$

$$=x\int\frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{x+\ln(x-1)}\mathrm{d}x=x\int\frac{\mathrm{e}^x(x-1)}{x^2}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x.$$

故通解为 $$y=C_1x+C_2\mathrm{e}^x.$$

例 7 已知方程 $(1-\ln x)y''+\frac{1}{x}y'-\frac{1}{x^2}y=0$ 的一个解 $y_1=\ln x$，求其通解.

解 方程 $(1-\ln x)y''+\frac{1}{x}y'-\frac{1}{x^2}y=0$ 与 $y_1=\ln x$ 线性无关的解

$$y_2=y_1\int\frac{1}{y_1^2}\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}=\ln x\int\frac{1}{\ln^2x}\mathrm{e}^{-\int\frac{\mathrm{d}x}{x(1-\ln x)}}\mathrm{d}x$$

$$=\ln x\int\frac{1}{\ln^2x}\mathrm{e}^{\ln(\ln x-1)}\mathrm{d}x=\ln x\int\frac{\ln x-1}{\ln^2x}\mathrm{d}x=x.$$

故通解为 $$y=C_1\ln x+C_2x.$$

例 8 在方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ 中，当系数满足什么条件时，其基本解组的朗斯基行列式等于常数？

解 因为，若 y_1,y_2 是 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ 的一个基本解组，则由刘维尔公式，对任一 $x_0\in(a,b)$，都有

$$W(x)=W(x_0)\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x}p(\tau)\mathrm{d}\tau}.$$

因为 $W(x_0)$ 等于常数，所以要 $W(x)$ 等于常数，必须使 $\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x}p(\tau)\mathrm{d}\tau}$ 为常数.

例 9 设 $y_1(x)$ 是 n 阶线性齐次方程

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=0$$

的一个非零解，证明：利用线性代换 $y=y_1(x)z$ 可将已知方程化为 $n-1$ 阶的齐次方程.

证 因为 $y=y_1z$，所以

$$y'=y_1'z+y_1z',\quad y''=y_1''z+2y_1'z+y_1z'',\quad \cdots$$
$$y^{(n)}=y_1^{(n)}z+C_n^1y_1^{(n-1)}z'+\cdots+C_n^{n-1}y_1z^{(n-1)}+y_1z^{(n)}.$$
代入 n 阶线性齐次方程，得
$$\begin{aligned}&z[y_1^{(n)}+a_1(x)y_1^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y_1'+a_n(x)y_1]\\&+y_1z^{(n)}+[C_n^{n-1}y_1'+a_1(x)y_1]z^{(n-1)}+\cdots\\&+[C_n^1y_1^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y_1]z'=0.\end{aligned}$$
因为 y_1 是 n 阶线性齐次方程的解，所以上面方程中第一项等于零.

再令 $z=\int u(x)\mathrm{d}x$，则上面方程化为
$$\begin{aligned}&y_1u^{(n-1)}+[C_n^{n-1}y_1'+a_1(x)y_1]u^{(n-2)}+\cdots\\&+[C_n^1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y_1]u=0\end{aligned}$$
是 $n-1$ 阶的齐次方程.

例 10 设 $y_1(x)$，$y_2(x)$ 是二阶线性齐次方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ 在区间 I 上的一个基本解组. 证明：方程的系数 $p(x)$ 和 $q(x)$ 由这个基本解组唯一确定.

证 因为
$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}y_1 & y_2\\ y_1'' & y_2''\end{vmatrix}&=\begin{vmatrix}y_1 & y_2\\ y_1''+q(x)y_1 & y_2''+q(x)y_2\end{vmatrix}\\&=\begin{vmatrix}y_1 & y_2\\ -p(x)y_1' & -p(x)y_2'\end{vmatrix}=-p(x)\begin{vmatrix}y_1 & y_2\\ y_1' & y_2'\end{vmatrix}\\&=-p(x)W[y_1,y_2],\end{aligned}$$
所以
$$p(x)=\frac{y_1y_2''-y_2y_1''}{W[y_1,y_2]},\quad x\in I.$$
同理
$$q(x)=\frac{y_1'y_2''-y_2'y_1''}{W[y_1,y_2]},\quad x\in I.$$

在疑难解析 3 中，已知 n 阶线性齐次方程 $y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y=0$ 也可以由其基本解组 $y_1(x)$，$y_2(x)$，$\cdots$，$y_n(x)$ 唯一确定. 不过这时系数 $p_1(x)$，$\cdots$，$p_{n-1}(x)$，$p_n(x)$ 的表示式与证明要更复杂一些，有

$$p_1(x)=-\frac{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \cdots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}}{W[y_1,y_2,\cdots,y_n]},$$

$$p_n(x)=(-1)^n\frac{\begin{vmatrix} y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \cdots & y_n'' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \cdots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}}{W[y_1,y_2,\cdots,y_n]}.$$

例11 作出以$1,\sin t,\cos t,t\in(-\infty,+\infty)$为基本解组的三阶线性齐次微分方程.

解 因为 $W(t)=\begin{vmatrix} 1 & \sin t & \cos t \\ 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & -\sin t & -\cos t \end{vmatrix}=-1\neq 0,$

所以,利用疑难解析3的结论知,所求方程为

$$\begin{vmatrix} 1 & \sin t & \cos t & x \\ 0 & \cos t & -\sin t & x' \\ 0 & -\sin t & -\cos t & x'' \\ 0 & -\cos t & \sin t & x''' \end{vmatrix}=0,$$

即
$$\frac{\mathrm{d}^3x}{\mathrm{d}t^3}+\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=0.$$

例12 设$\Delta(x)=\begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & a_{13}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & a_{23}(x) \\ a_{31}(x) & a_{32}(x) & a_{33}(x) \end{vmatrix}$,证明:

$$\frac{\mathrm{d}\Delta(x)}{\mathrm{d}x}=\begin{vmatrix} a_{11}'(x) & a_{12}'(x) & a_{13}'(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & a_{23}(x) \\ a_{31}(x) & a_{32}(x) & a_{33}(x) \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & a_{13}(x) \\ a_{21}'(x) & a_{22}'(x) & a_{23}'(x) \\ a_{31}(x) & a_{32}(x) & a_{33}(x) \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & a_{13}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & a_{23}(x) \\ a'_{31}(x) & a'_{32}(x) & a'_{33}(x) \end{vmatrix},$$

并证明对 n 阶行列式也有类似的结果.

证 由微分运算法则知

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\Delta(x)}{\mathrm{d}x}=&[a_{11}(x)a_{22}(x)a_{33}(x)+a_{12}(x)a_{23}(x)a_{31}(x)\\&+a_{13}(x)a_{21}(x)a_{32}(x)-a_{11}(x)a_{23}(x)a_{32}(x)\\&-a_{12}(x)a_{21}(x)a_{33}(x)-a_{13}(x)a_{22}(x)a_{31}(x)]'\\=&a'_{11}(x)[a_{22}(x)a_{33}(x)-a_{23}(x)a_{32}(x)]\\&+a'_{12}(x)[a_{23}(x)a_{31}(x)-a_{21}(x)a_{33}(x)]\\&+a'_{13}(x)[a_{21}(x)a_{32}(x)-a_{22}(x)a_{31}(x)]+\cdots\\&+a'_{33}(x)[a_{11}(x)a_{22}(x)-a_{12}(x)a_{21}(x)]\\=&\begin{vmatrix} a'_{11}(x) & a'_{12}(x) & a'_{13}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & a_{23}(x) \\ a_{31}(x) & a_{32}(x) & a_{33}(x) \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & a_{13}(x) \\ a'_{21}(x) & a'_{22}(x) & a'_{23}(x) \\ a_{31}(x) & a_{32}(x) & a_{33}(x) \end{vmatrix}\\&+\begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & a_{13}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & a_{23}(x) \\ a'_{31}(x) & a'_{32}(x) & a'_{33}(x) \end{vmatrix}.\end{aligned}$$

对 n 阶行列式情形

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\Delta(x)}{\mathrm{d}x}=&\Big[\sum_{i_1i_2\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}(x)a_{i_22}(x)\cdots a_{i_nn}(x)\Big]'\\=&\sum(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}[a'_{i_11}(x)a_{i_22}(x)\cdots a_{i_nn}(x)\\&+a_{i_11}(x)a'_{i_22}(x)\cdots a_{i_nn}(x)+\cdots\\&+a_{i_11}(x)a_{i_22}(x)\cdots a'_{i_nn}(x)]\\=&\sum(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a'_{i_11}(x)a_{i_22}(x)\cdots a_{i_nn}(x)\\&+\sum(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}(x)a'_{i_22}(x)\cdots a_{i_nn}(x)+\cdots\\&+\sum(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}(x)a_{i_22}(x)\cdots a'_{i_nn}(x).\end{aligned}$$

$$
=\sum_{i=1}^{n}\begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a'_{i1}(x) & a'_{i2}(x) & \cdots & a'_{in}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \cdots & a_{nn}(x) \end{vmatrix}.
$$

第三节　n 阶线性非齐次方程

主要内容

1. **定理3.8**　n 阶线性非齐次方程

$$L[y]=y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y=f(x) \quad ①$$

的通解等于它的对应齐次方程

$$L[y]=y''+p_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y=0 \quad ②$$

的通解与它本身的一个特解之和.

即:若 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 是式②的 n 个线性无关的解,$C_1,C_2,\cdots,C_n$ 是 n 个任意常数,$\overline{y}$ 是式①的一个特解,则式②的通解为

$$y=C_1y_1+C_2y_2+\cdots+C_ny_n.$$

式①的通解为

$$y(x)=\overline{y}+C_1y_1+C_2y_2+\cdots+C_ny_n.$$

2. 求式①特解的**常数变易法(拉格朗日法)**

设 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 是式②的 n 个线性无关的解,则 $y=C_1y_1+C_2y_2+\cdots+C_ny_n$ 是式②的通解. 设有一组函数 $C_1(x),C_2(x),\cdots,C_n(x)$,使

$$y=C_1(x)y_1+C_2(x)y_2+\cdots+C_n(x)y_n \quad ③$$

成为式①的解.

由 $C_1(x),C_2(x),\cdots,C_n(x)$ 所应满足的 n 个条件,得关于变量

$C_i'(x)$ $(i=1,2,\cdots,n)$的线性代数方程组

$$\begin{cases}C_1'(x)y_1+C_2'(x)y_2+\cdots+C_n'(x)y_n=0,\\ C_1'(x)y_1'+C_2'(x)y_2'+\cdots+C_n'(x)y_n'=0,\\ \quad\vdots\\ C_1'(x)y_1^{(n-2)}+C_2'(x)y_2^{(n-2)}+\cdots+C_n'(x)y_n^{(n-2)}=0,\\ C_1'(x)y_1^{(n-1)}+C_2'(x)y_2^{(n-1)}+\cdots+C_n'(x)y_n^{(n-1)}=f(x)\end{cases}$$

其系数行列式恒不为零，可解出$C_i'(x)$ $(i=1,2,\cdots,n)$，再积分即可求出$C_i(x)$ $(i=1,2,\cdots,n)$. 代入式③即得式①的一个解.

疑 难 解 析

1. 若已知 $y_1(x)$，$y_2(x)$是二阶线性非齐次方程

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$$

对应齐次方程的基本解组，$p(x)$，$q(x)$，$f(x)$在 I 上连续，怎样求非齐次方程在 I 上的通解？

答　求非齐次方程通解的方法很多，在已知对应齐次方程通解的情形，一般用常数变易法来求解.

设对应齐次方程通解为$y=C_1y_1+C_2y_2$，其中C_1，C_2为任意常数. 依常数变易法，将非齐次方程的解表示为

$$y(x)=C_1(x)y_1+C_2(x)y_2,$$

可得$C_1'(x)$，$C_2'(x)$所满足的代数方程

$$\begin{cases}C_1'(x)y_1+C_2'(x)y_2=0,\\ C_1'(x)y_1'+C_2'(x)y_2'=f(x),\end{cases}$$

解得

$$C_1'(x)=-\frac{y_2(x)f(x)}{W[y_1(x),y_2(x)]},\quad C_2'(x)=\frac{y_1(x)f(x)}{W[y_1(x),y_2(x)]}$$

对$C_1'(x)$，$C_2'(x)$的表示式积分，得

$$C_1(x)=\int_{x_0}^{x}-\frac{y_2(\tau)f(\tau)}{W[y_1(\tau),y_2(\tau)]}\mathrm{d}\tau,$$

$$C_2(x)=\int_{x_0}^{x}\frac{y_1(\tau)f(\tau)}{W[y_1(\tau),y_2(\tau)]}\mathrm{d}\tau.$$

于是，非齐次方程的通解为

$$y(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+\int_{x_0}^{x}\frac{[y_1(\tau)y_2(x)-y_1(x)y_2(\tau)]f(\tau)}{W[y_1(\tau),y_2(\tau)]}\mathrm{d}\tau.$$

2. 怎样求欧拉(Euler)方程

$$x^n y^{(n)}+p_1x^{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}xy'+p_ny=f(x)$$

的解？其中，$p_1,p_2,\cdots,p_n$ 为常数.

答 作代换 $x=\mathrm{e}^t$ 或 $t=\ln x$，将自变量 x 换成 t，得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},\quad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{1}{x^2}\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right),$$

$$\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3}=\frac{1}{x^3}\left(\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}t^3}-3\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right),\cdots.$$

代入欧拉方程，得一以 t 为自变量的常系数线性微分方程，求出解后代回自变量 x 即可.

若用记号 D 表示对 t 的求导运算 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$，则有

$$xy'=Dy,$$

$$x^2y''=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)y=D(D-1)y,$$

$$x^3y'''=\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}t^3}-3\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=D(D-1)(D-2)y,$$

$$\vdots$$

$$x^ky^{(k)}=D(D-1)(D-2)\cdots(D-k+1)y,$$

使欧拉方程形式变得简单，易于计算.

方法、技巧与典型例题分析

在一般情形，求 n 阶线性非齐次方程的通解是比较困难的，也没有统一的方法. 下面给出的例题介绍了一些求解的方法，供读者

参考.

例 1 设 $p(x),q(x),f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，证明：方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ 满足条件 $y(0)=y(1)=0$ 的解唯一的充要条件是方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ 只有零解满足条件 $\bar{y}(0)=\bar{y}(1)=0$.

证 设 $y_1(x),y_2(x)$ 是齐次方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ 的任意两个解，则依刘维尔公式，有

$$W(x)=W(0)\mathrm{e}^{-\int_0^x p(\tau)\mathrm{d}\tau},$$

即

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1(0) & y_2(0) \\ y_1'(0) & y_2'(0) \end{vmatrix} \mathrm{e}^{-\int_0^x p(\tau)\mathrm{d}\tau}.$$

因为 $y_1(0)=0,y_2(0)=0$，所以 $W(x)=0$，从而 $y_1(x),y_2(x)$ 线性相关，即 $y_1(x)=0$.

充分性　用反证法. 设 $y_1(x),y_2(x)$ 是 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ 满足 $y(0)=y(1)=0$ 的两个解，作函数

$$\tilde{y}(x)=y_1(x)-y_2(x),$$

则 $\tilde{y}(x)\not\equiv 0$ 是 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ 的满足条件 $y(0)=y(1)=0$ 的解，这与前面推导的 $y''+p(x)y'+q(x)y=0,y(0)=y(1)=0$ 只有零解矛盾. 故只能有唯一解.

必要性　用反证法. 设 $y_1(x)$ 是方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ 的满足条件 $y(0)=y(1)=0$ 的唯一解，且 $y_2(x)$ 是 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ 的满足条件 $y(0)=y(1)=0$ 的解，作函数

$$\bar{y}(x)=y_1(x)+y_2(x),$$

则 $\bar{y}$ 也是 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ 满足条件 $y(0)=y(1)=0$ 的解，与唯一性矛盾.

例 2 已知 $y_1(x)=x$ 是齐次方程 $x^2y''-2xy'+2y=0$ 的一个解，求非齐次方程 $x^2y''-2xy'+2y=2x^3$ 的通解.

解 设 $y_2(x)=u(x)x$ 是齐次方程的一个与 $y_1(x)$ 线性无关的解，则 $y'_2=u+xu'$，$y''_2=2u'+xu''$，代入齐次方程，得

$$x^2(2u'+xu'')-2x(u+xu')+2xu=0,$$

即 $$u''=0 \Rightarrow u'=C_1 \Rightarrow u=C_1x+C_2.$$

令 $C_1=1, C_2=0$，得 $u=x$. 即 $y_2(x)=x^2$，所以齐次方程通解为

$$y=C_1x+C_2x^2.$$

可以观察到 $\bar{y}=x^3$ 是非齐次方程的一个特解，故非齐次方程通解为

$$y(x)=x^3+C_1x+C_2x.$$

例3 设 $y''+p(x)y'=f(x)$ 的一个特解是 $1/x$，对应齐次方程有一特解是 x^2，求：

(1) $p(x)$ 和 $f(x)$ 的表达式；

(2) $y''+p(x)y'=f(x)$ 的通解.

解 (1) 由题设条件建立方程组

$$\begin{cases} 2+2xp(x)=0, \\ \dfrac{2}{x^3}-\dfrac{1}{x^2}p(x)=f(x), \end{cases}$$

解得 $p(x)=-\dfrac{1}{x}, f(x)=\dfrac{3}{x^3}$. 故原方程为

$$y''-\frac{y'}{x}=\frac{3}{x^3}.$$

(2) 显然，$y_1=x^2, y_2=1$ 是对应齐次方程的两个线性无关的解，$\bar{y}=\dfrac{1}{x}$ 是非齐次方程的一个解，所以原方程的通解为

$$y(x)=\frac{1}{x}+C_1x^2+C_2.$$

例4 已知 $y_1=x, y_2=x+e^x, y_3=1+x+e^x$ 是线性非齐次微分方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ 的解，求此方程的通解.

解 因为 $y_2-y_1=e^x, y_3-y_1=e^x+1$ 是对应齐次方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ 的解，且 e^x 与 e^x+1 线性无关，所以原方程的通解为

$$y=C_1e^x+C_2(e^x+1)+x.$$

例5 用变量代换法，求下列方程的通解：

(1) $xy''+xy'^2+\frac{1}{2}y'=\frac{1}{4}$;

(2) $(x-1)y''+(x+1)y'+y=2x$.

解 作变量代换要根据具体问题选择适当的代换.

(1) 作代换 $t=\sqrt{x}$, $u=e^y$, 则 $x=t^2$, $y=\ln u$, 于是

$$y'=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{1}{u}\frac{du}{dt}\frac{1}{2\sqrt{x}},$$

$$y''=\left[-\frac{1}{u^2}\left(\frac{du}{dt}\right)^2+\frac{1}{u}\frac{d^2u}{dt^2}\right]\frac{1}{(2\sqrt{x})^2}-\frac{1}{u}\frac{du}{dt}\frac{1}{4x\sqrt{x}},$$

原方程化为

$$\frac{1}{4}\left[\frac{1}{u}\frac{d^2u}{dt^2}-\frac{1}{u^2}\left(\frac{du}{dt}\right)^2\right]-\frac{1}{4t}\frac{1}{u}\frac{du}{dt}+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{u}\frac{du}{dt}\right)^2+\frac{1}{4t}\frac{1}{u}\frac{du}{dt}=\frac{1}{4},$$

即

$$\frac{d^2u}{dt^2}-u=0. \qquad ①$$

易得式①的通解为 $u=C_1e^t+C_2e^{-t}$（因为各项系数之和为零，所以 $u_1=e^t$ 是一个特解. 又由 $u=u_1\int\frac{C}{u_1^2}e^{-\int p(\tau)d\tau}dt=e^t\int\frac{C}{e^{2t}}dt=-\frac{C}{2}e^{-t}$，得 $u_2=e^{-t}$）.

代回原变量，得原方程通解为

$$y(x)=\ln(C_1e^{\sqrt{x}}+C_2e^{-\sqrt{x}}).$$

(2) 作代换 $u=(x-1)y$，则

$$\frac{du}{dx}=y+(x-1)\frac{dy}{dx},\quad \frac{d^2u}{dx^2}=2\frac{dy}{dx}+(x-1)\frac{d^2y}{dx^2},$$

原方程化为

$$\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{du}{dx}=2x. \qquad ②$$

显然，$u_1=1$ 与 $u_2=e^{-x}$ 是对应齐次方程的两个线性无关的解，所以对应齐次方程的通解为

$$u=C_1+C_2e^{-x}.$$

由常数变易法，求得式②的通解为

$$u(x)=C_1+C_2e^{-x}+x^2-2x.$$

代回原变量，得原方程通解为

$$y(x)=C_1\frac{1}{x-1}+C_2\frac{e^{-x}}{x-1}+\frac{x^2-2x}{x-1}.$$

例 6 求方程 $x^2y^{(4)}+8xy'''+12y''+x^2y=2e^x$ 的通解.

解 作变换 $y=e^{-\frac{1}{4}\int\frac{8}{x}dx}\cdot z=\frac{1}{x^2}z$，则有

$$y'=z'\frac{1}{x^2}-2\frac{z}{x^3},\quad y''=z''\frac{1}{x^2}-4z'\frac{1}{x^3}+\frac{6z}{x^4},$$

$$y'''=z'''\frac{1}{x^2}-6z''\frac{1}{x^3}+18z'\frac{1}{x^4}-\frac{24z}{x^5},$$

$$y^{(4)}=z^{(4)}\frac{1}{x^2}-8z'''\frac{1}{x^3}+36z''\frac{1}{x^4}-96z'\frac{1}{x^5}+120\frac{z}{x^6}.$$

化原方程为

$$z^{(4)}+z=2e^x.$$

求得此方程的通解为

$$z=e^{-\sqrt{2}x/2}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{2}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)$$

$$+e^{\sqrt{2}x/2}\left(C_3\cos\frac{\sqrt{2}}{2}x+C_4\sin\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)+e^x.$$

所以，原方程通解为

$$y=\frac{1}{x^2}\left[e^x+e^{-\sqrt{2}x/2}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{2}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)\right.$$

$$\left.+e^{\sqrt{2}x/2}\left(C_3\cos\frac{\sqrt{2}}{2}x+C_4\sin\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)\right].$$

例 7 求解下列欧拉方程：

(1) $x^2y''-5xy'+13y=0$；

(2) $x^3y'''-x^2y''+2xy'-2y=x^3+3x$；

(3) $x^3y'''+xy'-y=3x^4$.

解 求解欧拉方程，要利用代换 $x=e^t,t=\ln x$，要熟悉代换后的变换公式．还可用算子形式 D，也要熟悉算子的变换公式．欧拉方程代换后化为常系数线性微分方程，其求解方法请参阅后面第

四、五、六节.

(1) 由 $x=e^t, t=\ln x$，得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}\frac{dy}{dt},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right).$$

代入原方程，得 $$\frac{d^2y}{dt^2}-6\frac{dy}{dt}+13y=0.$$

由常系数线性齐次方程的特征方程法，求得其通解为

$$y=(C_1\cos 3t+C_2\sin 3t)e^{-2t}.$$

代回原变量，得原方程通解为

$$y=\frac{1}{x^2}[C_1\cos(3\ln x)+C_2\sin(3\ln x)].$$

(2) 由 $x=e^t, t=\ln x$，得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}\frac{dy}{dt},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right),$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{1}{x^3}\left[\frac{d^3y}{dt^3}-3\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}\right].$$

代入原方程，得

$$\frac{d^3y}{dt^3}-4\frac{d^2y}{dt^2}+5\frac{dy}{dt}-2y=e^{3t}+3e^t.$$

由常系数线性非齐次方程求解方法求得其通解为

$$y=C_1e^t+C_2te^t+C_3e^{2t}+\frac{1}{4}e^{3t}-\frac{3}{2}e^tt^2.$$

代回原变量，得原方程通解为

$$y=x(C_1+C_2\ln x)+C_3x^2+\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{2}x(\ln x)^2.$$

(3) 由 $x=e^t, t=\ln x$，得

$$\frac{d^3y}{dt^3}-3\frac{d^2y}{dt^2}+3\frac{dy}{dt}-y=3e^{4t}.$$

按常系数线性非齐次方程求解方法求得其通解为

$$y=C_1e^t+C_2te^t+C_3t^2e^t+\frac{1}{9}e^{4t}.$$

代回原变量，得原方程通解为

$$y=C_1x+C_2x\ln x+C_3x\ln^2x+\frac{1}{9}x^4.$$

例8 求下列欧拉方程的通解：

(1) $y''-\frac{y'}{x}+\frac{y}{x^2}=\frac{2}{x}$； (2) $x^2y''-xy'+4y=x\sin(\ln x)$；

(3) $x^2y''-2xy'+2y=\ln^2x-2\ln x$；

(4) $x^2y''-3xy'+4y=x+x^2\ln x$.

解 (1) 方程化为$x^2y''-xy'+y=2x$. 作代换$x=\mathrm{e}^t$，原方程化为

$$(D^2-2D+1)y=2\mathrm{e}^t. \qquad ③$$

对应齐次方程的特征方程 $r^2-2r+1=0$ 的特征根 $r_{1,2}=1$，故对应齐次方程通解为 $y=(C_1+C_2t)\mathrm{e}^t$.

设 $\overline{y}=At^2\mathrm{e}^t$，代入式③，解得 $\overline{y}=t^2\mathrm{e}^t$，则式③的通解为

$$y=(C_1+C_2t)\mathrm{e}^t+t^2\mathrm{e}^t.$$

故原方程通解为

$$y=(C_1+C_2\ln x)x+x\ln^2x.$$

(2) 作代换 $x=\mathrm{e}^t$，则 $t=\ln x$，原方程化为

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+4y=\mathrm{e}^t\sin t. \qquad ④$$

对应齐次方程的特征方程 $r^2-2r+4=0$ 的特征根 $r_{1,2}=1\pm\sqrt{3}\mathrm{i}$，故齐次方程的通解为 $y=\mathrm{e}^t(C_1\cos\sqrt{3}t+C_2\sin\sqrt{3}t)$.

设 $\overline{y}=\mathrm{e}^t(A\cos t+B\sin t)$，代入式④，解得 $\overline{y}=\frac{1}{2}\mathrm{e}^t\sin t$，则式④的通解为

$$y=(C_1\cos\sqrt{3}t+C_2\sin\sqrt{3}t)+\frac{1}{2}\mathrm{e}^t\sin t.$$

故原方程通解为

$$y=x\left[C_1\cos(\sqrt{3}\ln x)+C_2\sin(\sqrt{3}\ln x)+\frac{1}{2}\sin(\ln x)\right].$$

(3) 作代换 $x=e^t$，原方程化为

$$(D^2-3D+2)y=t^2-2t. \qquad ⑤$$

对应齐次方程的特征方程 $r^2-3r+2=0$ 的特征根 $r_1=1, r_2=2$，故齐次方程的通解为 $y=C_1e^t+C_2e^{2t}$.

设 $\overline{y}=At^2+Bt+C$，代入式⑤，解得 $\overline{y}=\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}$，则式⑤的通解为

$$y=C_1e^t+C_2e^{2t}+\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}.$$

故原方程通解为

$$y=C_1x+C_2x^2+\frac{1}{2}\ln^2x+\frac{1}{2}\ln x+\frac{1}{4}.$$

(4) 作代换 $x=e^t$，原方程化为

$$\frac{d^2y}{dt^2}-4\frac{dy}{dt}+4y=e^t+te^{2t}. \qquad ⑥$$

对应齐次方程的特征方程 $r^2-4r+4=0$ 的特征根 $r_{1,2}=2$，故齐次方程的通解为 $y=C_1e^{2t}+C_2te^{2t}$.

设 $\overline{y}=Ae^t+t^2(Bt+C)e^{2t}$，代入式⑥，解得 $\overline{y}=e^t+\frac{1}{6}t^3e^{2t}$，则式⑥的通解为

$$y=(C_1+C_2t)e^{2t}+e^t+\frac{1}{6}t^3e^{2t}.$$

故原方程通解为

$$y=x^2(C_1+C_2\ln x)+x+\frac{1}{6}x^2\ln^3x.$$

例 9 作变换 $u=\tan y$，求方程 $x^2y''+2x^2\tan y\cdot y'^2+xy'-\sin y\cos y=0$ 的通解.

解 由 $u=\tan y$，得 $y=\arctan u$，则

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{1+u^2}\frac{du}{dx},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{1+u^2}\frac{d^2u}{dx^2}-\frac{2u}{(1+u^2)^2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2,$$

且 $$\sin y\cos y=\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}=\frac{u}{1+u^2},$$
代入原方程，得
$$x^2\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}-u=0$$
是欧拉方程，可求得其通解为$u=C_1x+\frac{C_2}{x}$. 故原方程通解为
$$y=\arctan\left(C_1x+\frac{C_2}{x}\right).$$

例 10 作变换$u=xy$，求方程$x(x+1)^2y''+(3x+2)(x+1)y'+y=\ln(x+1)$的通解.

解 由$u=xy$，则
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{u'}{x}-\frac{u}{x^2},\quad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{u''}{x}-2\frac{u'}{x^2}+2\frac{u}{x^3},$$
代入原方程，得
$$(x+1)^2u''+(x+1)u'-u=\ln(x+1)$$
是欧拉方程，可求得其通解为
$$u=C_1(x+1)+\frac{C_2}{x+1}-\ln(x+1).$$
故原方程通解为
$$y=\frac{1}{x}\left[C_1(x+1)+\frac{C_2}{x+1}-\ln(x+1)\right].$$

第四节　n 阶常系数线性齐次方程解法

主要内容

形如
$$L[y]=y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}y'+a_ny=f(x) \qquad ①$$
的方程，其中$a_i(i=1,2,\cdots,n)$是实常数，称为n **阶常系数线性非齐**

次方程．而

$$L[y]=y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}y'+a_ny=0 \quad ②$$

称为 n **阶常系数线性齐次方程**．

1．$L[e^{\lambda x}]=P(\lambda)e^{\lambda x}$，其中

$$P(\lambda)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n, \quad ③$$

式③称为**特征多项式**．

$P(\lambda)=0$ 称为式②的**特征方程**．$P(\lambda)=0$ 的根称为式②的特征根．

（1）若特征根互异．

（i）当 $P(\lambda)=0$ 有 n 个互异的实根 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 时，方程②有 n 个特解 $y_1=e^{\lambda_1 x},y_2=e^{\lambda_2 x},\cdots,y_n=e^{\lambda_n x}$，所以，函数

$$y=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x}+\cdots+C_ne^{\lambda_n x} \quad ④$$

是方程②的通解，其中 $C_1,C_2,\cdots,C_n$ 是任意常数．

（ii）若 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 中有复数．设 $\lambda_k=a+ib$，则 $a-ib$ 也是特征根．方程②有成对的复解

$$e^{(a+ib)x},\quad e^{(a-ib)x}$$

可换成如下的实数解：

$$e^{ax}\cos bx,\quad e^{ax}\sin bx. \quad ⑤$$

定理 3.9 如果 $y_1(x),y_2(x),\cdots,y_n(x)$ 是在区间 (a,b) 上的 n 个线性无关的函数，b_1,b_2 是两个不等于零的常数，则函数组

$$b_1[y_1(x)+y_2(x)],\ b_2[y_1(x)-y_2(x)],\ y_3(x),\ \cdots,\ y_n(x)$$

在区间 (a,b) 上仍然是线性无关的．

（2）若特征根有重根．

当 λ_1 是方程②的 k 重根时，方程②有 k 个特解

$$e^{\lambda_1 x},\ xe^{\lambda_1 x},\ \cdots,\ x^{k-1}e^{\lambda_1 x}. \quad ⑥$$

定理 3.10 如果方程②有两两互异的特征根 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_p$，它们的重数分别为 $m_1,m_2,\cdots,m_p,m_i\geqslant 1$，且 $m_1+m_2+\cdots+m_p=n$，则与它们对应的方程②的特解是

$$\begin{cases} e^{\lambda_1 x}, & xe^{\lambda_1 x}, & \cdots, & x^{m_1-1}e^{\lambda_1 x}, \\ e^{\lambda_2 x}, & xe^{\lambda_2 x}, & \cdots, & x^{m_2-1}e^{\lambda_2 x}, \\ & \vdots & & \\ e^{\lambda_p x}, & xe^{\lambda_p x}, & \cdots, & x^{m_p-1}e^{\lambda_p x}, \end{cases} \qquad ⑦$$

且式⑦构成方程②在$(-\infty,+\infty)$上的基本解组.

若$\lambda_1=a+\mathrm{i}b$是方程②的m_1重特征根，则$a-\mathrm{i}b$也是方程②的m_1重特征根，故式⑦中有如下$2m_1$个实解：

$$e^{ax}\cos bx,\ xe^{ax}\cos bx,\ \cdots,\ x^{m_1-1}e^{ax}\cos bx,$$
$$e^{ax}\sin bx,\ xe^{ax}\sin bx,\ \cdots,\ x^{m_1-1}e^{ax}\sin bx.$$

疑 难 解 析

怎样求解n阶常系数线性齐次微分方程？

答 求解n阶常系数齐次微分方程

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}y'+a_ny=0, \qquad ①$$

常用的方法有特征方程法与拉普拉斯(Laplace)变换法(将在第六节中讨论).

特征方程法求通解的步骤如下.

(1) 写出微分方程①的特征方程

$$\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n=0,$$

这是一个代数方程.

(2) 正确求出特征方程的特征根，一般可以通过分解因式的方法求出特征根，要注意以下几点：

(i) 特征根的个数(k重根算k个)等于微分方程的阶数；

(ii) 特征根中的复根必然成对(共轭)出现；

(iii) 特征根与微分方程的通解中解的对应性.

当特征根为单根时，若$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$为互不相等的实数，则微分方程有如下的$n$个特解

$$e^{\lambda_1 x},\ e^{\lambda_2 x},\ \cdots,\ e^{\lambda_n x}.$$

若 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$ 中有复数，设 $\lambda_1=a+\mathrm{i}b$ 是一个特征根，则 $\lambda_2=a-\mathrm{i}b$ 也是一个特征根，对应微分方程中两个实值解 $\mathrm{e}^{ax}\cos bx$，$\mathrm{e}^{ax}\sin bx$.

当特征根为 m 重根时，对应微分方程的 m 个解. 若 λ_k 为特征方程的 m 重实根，则对应微分方程的 m 个特解，即

$$\mathrm{e}^{\lambda_k x},\ x\mathrm{e}^{\lambda_k x},\ \cdots,\ x^{m-1}\mathrm{e}^{\lambda_k x};$$

若 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_p$ 分别为特征方程的 $m_1,m_2,\cdots,m_p$ 重根，且 $m_1+m_2+\cdots+m_p=n$ 时，它们对应微分方程的 n 个特解

$$\begin{cases}\mathrm{e}^{\lambda_1 x},\ x\mathrm{e}^{\lambda_1 x},\ \cdots,\ x^{m_1-1}\mathrm{e}^{\lambda_1 x},\\ \mathrm{e}^{\lambda_2 x},\ x\mathrm{e}^{\lambda_2 x},\ \cdots,\ x^{m_2-1}\mathrm{e}^{\lambda_2 x},\\ \qquad\vdots\\ \mathrm{e}^{\lambda_p x},\ x\mathrm{e}^{\lambda_p x},\ \cdots,\ x^{m_p-1}\mathrm{e}^{\lambda_p x}.\end{cases}$$

若 $\lambda_1=a+\mathrm{i}b$ 是特征方程的 m 重复根，则 $a-\mathrm{i}b$ 也是特征方程的 m 重复根，它们对应微分方程的 $2m$ 个特解

$$\mathrm{e}^{ax}\cos bx,\ x\mathrm{e}^{ax}\cos bx,\ \cdots,\ x^{m-1}\mathrm{e}^{ax}\cos bx,$$
$$\mathrm{e}^{ax}\sin bx,\ x\mathrm{e}^{ax}\sin bx,\ \cdots,\ x^{m-1}\mathrm{e}^{ax}\sin bx.$$

多个复根的情形也可以同样写出.

(3) 根据(2)的结果写出齐次微分方程①的基本解组与通解.

方法、技巧与典型例题分析

熟知线性齐次微分方程通解的结构，熟练掌握特征方程法解常系数线性微分方程，是本节的基本要求. 除此之外，还应学会利用特征方程与特征根讨论有关常系数线性齐次方程解的一些理论问题.

例 1 求下列齐次方程的通解：

(1) $y''+9y'+20y=0$；　　(2) $y''-2y'+y=0$；

(3) $y'''-y=0$；　　(4) $y^{(4)}-y''=0$；

(5) $y^{(4)}+y=0$；　　(6) $y'''-y''-y'+y=0$；

(7) $y^{(6)}-2y^{(4)}-y''+2y=0$;　　(8) $4y''-20y'+25y=0$.

解　(1) 特征方程为$\lambda^2+9\lambda+20=0$,其特征根$\lambda_1=-4,\lambda_2=-5$,故齐次方程通解为

$$y=C_1e^{-4x}+C_2e^{-5x}.$$

(2) 特征方程为$\lambda^2-2\lambda+1=0$,有二重特征根$r_{1,2}=1$,故齐次方程通解为

$$y=(C_1+C_2x)e^x.$$

(3) 特征方程为$\lambda^3-1=0$,化为$(\lambda-1)(\lambda^2+\lambda+1)=0$,其特征根为$\lambda_1=1,\lambda_2=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\lambda_3=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$,故齐次方程通解为

$$y=C_1e^x+e^{-x/2}\left(C_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right).$$

(4) 特征方程为$\lambda^4-\lambda^2=0$,化为$\lambda^2(\lambda-1)(\lambda+1)=0$,其特征根为$\lambda_{1,2}=0,\lambda_3=-1,\lambda_4=1$,故齐次方程通解为

$$y=C_1+C_2x+C_3e^{-x}+C_4e^x.$$

(5) 特征方程为$\lambda^4+1=0$,化为$(\lambda^2-i)(\lambda^2+i)=0$,其特征根为$\lambda_{1,2}=\frac{\sqrt{2}}{2}(1\pm i),\lambda_{3,4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}(1\pm i)$,故齐次方程通解为

$$y=e^{\sqrt{2}x/2}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{2}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)$$
$$+e^{-\sqrt{2}x/2}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{2}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{2}}{2}x\right).$$

(6) 特征方程为$\lambda^3-\lambda^2-\lambda+1=0$,化为$(\lambda+1)(\lambda-1)^2=0$,其特征根为$\lambda_1=-1,\lambda_{2,3}=1$,故齐次方程通解为

$$y=C_1e^{-x}+(C_2+C_3x)e^x.$$

(7) 特征方程为$\lambda^6-2\lambda^4-\lambda^2+2=0$,化为

$$\lambda^4(\lambda^2-2)-(\lambda^2-2)=0,$$

即　　$$(\lambda-\sqrt{2})(\lambda+\sqrt{2})(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda^2+1)=0,$$

其特征根为$\lambda_1=\sqrt{2},\lambda_2=-\sqrt{2},\lambda_3=1,\lambda_4=-1,\lambda_5=i,\lambda_6=-i$,

故齐次方程的通解为

$$y=C_1e^{\sqrt{2}x}+C_2e^{-\sqrt{2}x}+C_3e^x+C_4e^{-x}+C_5\cos x+C_6\sin x.$$

(8) 特征方程为$4\lambda^2-20\lambda+25=0$,其特征根为$\lambda_{1,2}=5/2$,故齐次方程通解为

$$y=(C_1+C_2x)e^{5x/2}.$$

例2 求下列方程满足给定初始条件的解:

(1) $y''-3y'+2y=0, y(0)=2, y'(0)=-3$;

(2) $y''+4y'+4y=0, y(2)=4, y'(2)=0$;

(3) $y''+y'=0, y(0)=2, y'(0)=5$;

(4) $y''+\omega^2y=0, y(0)=a, y'(0)=v_0$.

解 先求出齐次方程的通解,再代入初始条件确定任意常数,即可求得方程满足给定初始条件的解.

(1) 特征方程为$\lambda^2-3\lambda+2=0$,其特征根为$\lambda_1=1,\lambda_2=2$,故齐次方程通解为

$$y=C_1e^x+C_2e^{2x},$$

求导,得 $$y'=C_1e^x+2C_2e^{2x}.$$

代入初始条件到y和y',解得$C_1=7,C_2=-5$,则所求特解为

$$y=7e^x-5e^{2x}.$$

(2) 特征方程为$\lambda^2+4\lambda+4=0$,其特征根为$\lambda_{1,2}=-2$,故齐次方程通解为

$$y=(C_1+C_2x)e^{-2x},$$

求导,得 $$y'=(-2C_1+C_2-2C_2x)e^{-2x}.$$

代入初始条件到y和y',解得$C_1=-12e^4,C_2=8e^4$,则所求特解为

$$y=-12e^{-2(x-2)}+8xe^{-2(x-2)}.$$

(3) 特征方程为$\lambda^2+\lambda=0$,其特征根为$\lambda_1=0,\lambda=-1$,故齐次方程通解为

$$y=C_1+C_2e^{-x}\Rightarrow y'=-C_2e^{-x}.$$

代入初始条件到y和y',解得$C_1=7,C_2=-5$,则所求特解为

$$y=7-5e^{-x}.$$

（4）特征方程为$\lambda^2+\omega^2=0$，其特征根为$\lambda_1=\omega i,\lambda_2=-\omega i$，故齐次方程通解为

$$y=C_1\cos\omega x+C_2\sin\omega x,$$

求导，得 $$y'=(-C_1\sin\omega x+C_2\cos\omega x)\omega.$$

代入初始条件到y和y'，解得$C_1=a,C_2=\frac{v_0}{\omega}$，则所求特解为

$$y=a\cos\omega x+\frac{v_0}{\omega}\sin\omega x.$$

例3 讨论λ为何值时，$y''+\lambda y=0$存在满足$y(0)=y(1)=0$的非零解.

解 $y''+\lambda y=0$的特征方程为$r^2+\lambda=0$，讨论λ取值的不同情形.

（1）若$\lambda<0$，则特征方程的特征根$r_1=\sqrt{-\lambda},r_2=-\sqrt{-\lambda}$，故齐次方程的通解为

$$y=C_1e^{\sqrt{-\lambda}x}+C_2e^{-\sqrt{-\lambda}x},$$

其中C_1,C_2为任意常数. 代入初始条件$y(0)=y(1)=0$，得方程组

$$\begin{cases}C_1+C_2=0,\\ e^{\sqrt{-\lambda}}C_1+e^{-\sqrt{-\lambda}}C_2=0.\end{cases}$$

因为系数行列式$D=e^{-\sqrt{-\lambda}}-e^{\sqrt{-\lambda}}\neq 0$，所以方程组只有零解，即$C_1=C_2=0$. 故当$\lambda<0$时，方程$y''+\lambda y=0$无满足条件$y(0)=y(1)=0$的非零解.

（2）若$\lambda=0$，则特征方程的特征根为$r_{1,2}=0$，故题给齐次方程的通解为

$$y=C_1+C_2x,$$

其中C_1,C_2为任意常数，代入初始条件得方程组

$$\begin{cases}C_1=0,\\ C_1+C_2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C_1=0,\\ C_2=0.\end{cases}$$

如同(1)的结果，当$\lambda=0$时，方程$y''+\lambda y=0$无满足条件$y(0)=$

$y(1)=0$ 的非零解.

(3) 若$\lambda>0$,则特征方程的特征根为$r_1=\sqrt{\lambda}\,\mathrm{i}$,$r_2=-\sqrt{\lambda}\,\mathrm{i}$,故齐次方程的通解为

$$y=C_1\cos\sqrt{\lambda}\,x+C_2\sin\sqrt{\lambda}\,x,$$

其中C_1,C_2 为常数. 代入初始条件$y(0)=y(1)=0$ 得方程组

$$\begin{cases}C_1=0,\\ C_1\cos\sqrt{\lambda}\,x+C_2\sin\sqrt{\lambda}\,x=0.\end{cases}$$

要使齐次方程有满足条件$y(0)=y(1)=0$ 的非零解,则$C_2\neq0$,即只能$\sin\sqrt{\lambda}\,x=0$. 从而得出

$$\lambda=n^2\pi^2,\quad n=\pm1,\pm2,\cdots.$$

综上所述,当$\lambda=n^2\pi^2$,$n=\pm1,\pm2,\cdots$时,方程$y''+\lambda y=0$ 存在满足条件$y(0)=y(1)=0$ 的非零解.

例4 讨论当p,q 取什么数值时,方程$y''+py'+qy=0$ 的一切解当$x\to+\infty$时,都趋于零.

解 方程的特征方程$\lambda^2+p\lambda+q=0$ 的特征根为$\lambda_1=\frac{1}{2}(-1+\sqrt{p^2-4q})$,$\lambda_2=\frac{1}{2}(-1-\sqrt{p^2-4q})$,现对$\lambda_1$,$\lambda_2$ 取值的不同情形进行讨论.

(1) 若$p^2-4q\geqslant0$,则λ_1,λ_2 为实数,齐次方程的通解为

$$y=C_1e^{\lambda_1x}+C_2e^{\lambda_2x}\quad(p^2-4q>0,\lambda_1\neq\lambda_2)$$

或 $$y=(C_1+C_2x)e^{\lambda x}\quad(p^2-4q=0,\lambda_1=\lambda_2=\lambda),$$

其中C_1,C_2 为任意实数.

要使$\lim\limits_{x\to+\infty}y=0$,要求

$$\lim_{x\to+\infty}e^{\lambda_1x}=0,\quad \lim_{x\to+\infty}e^{\lambda_2x}=0 \qquad ①$$

或 $$\lim_{x\to+\infty}xe^{\lambda x}=0. \qquad ②$$

当$\lambda_1<0$,$\lambda_2<0$ 时,式①与式②成立. 这时p,q 满足不等式组

$$\begin{cases} p^2 \geqslant 4q, \\ \dfrac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{p^2-4q}) < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p>0, \\ q>0. \end{cases}$$

(2) 若 $p^2-4q<0$，则 λ_1,λ_2 为共轭复数，齐次方程的通解为

$$y=\mathrm{e}^{-px/2}(C_1\cos\sqrt{q-p^2/4}x+C_2\sin\sqrt{q-p^2/4}x).$$

要使 $\lim\limits_{x\to+\infty} y=0$，要求 p,q 满足不等式组

$$\begin{cases} p^2<4q, \\ -\dfrac{p}{2}<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p>0, \\ q>0. \end{cases}$$

综上所述，当 $p>0,q>0$ 时，方程 $y''+py'+qy=0$ 的一切解当 $x\to+\infty$ 时，都趋于零.

例5 讨论当 p,q 取什么数值时，方程 $y''+py'+qy=0$ 的一切解在 $(a,+\infty)$ 上有界，其中 a 是某确定的常数.

解 利用例4的结论：当 $p>0,q>0$ 时，方程 $y''+py'+qy=0$ 的一切解 $y(x)$，当 $x\to+\infty$ 时，都有 $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x)=0$. 从而知，此时 $y(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上有界.

当 $p=0,q>0$ 时，方程的特征方程 $\lambda^2+q=0$ 的特征根为 $\lambda_{1,2}=\pm\sqrt{q}\,\mathrm{i}$，故齐次方程的通解为

$$y=C_1\cos\sqrt{q}\,x+C_2\sin\sqrt{q}\,x,$$

从而知 $y(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上有界.

当 $p>0,q=0$ 时，特征方程 $\lambda^2+p\lambda=0$ 的特征根为 $\lambda_1=0,\lambda_2=-p$，故齐次方程的通解为

$$y=C_1+C_2\mathrm{e}^{-px}.$$

因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-p(x)}=0$，所以 $y(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上有界.

当 $p<0,q<0$ 时，特征方程的特征根为

$$\lambda_1=\frac{1}{2}(-1+\sqrt{p^2-4q})>0,\quad \lambda_2=\frac{1}{2}(-1-\sqrt{p^2-4q})<0,$$

故齐次方程的通解为

$$y=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x}.$$

而 $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\lambda_1 x}=+\infty$. 从而知 $y(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上无界.

综上所述知，当 $p>0,q\geqslant 0$ 或 $p=0,q>0$ 时，方程 $y''+py'+qy=0$ 的一切解在 $(a,+\infty)$ 上有界.

例 6 求解方程 $t^2\dfrac{d^2x}{dt^2}-t\dfrac{dx}{dt}+x=0$.

解 所给方程是欧拉方程. 作变换 $t=e^u$，即 $u=\ln t$，则由

$$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{t}\frac{dx}{du},\quad \frac{d^2x}{dt^2}=\frac{1}{t^2}\left(\frac{d^2x}{du^2}-\frac{dx}{du}\right)$$

化为常系数线性齐次微分方程

$$\frac{d^2x}{du^2}-2\frac{dx}{du}+x=0, \qquad ①$$

其特征方程为 $\lambda^2-2\lambda+1=0$，特征根 $\lambda_{1,2}=1$，故式①的通解为

$$x=(C_1+C_2x)e^u.$$

代回原变量，得原欧拉方程的通解为

$$x(t)=(C_1+C_2\ln t)t.$$

例 7 方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ 的系数 $p(x),q(x)$ 满足什么条件时，可经过适当的线性齐次变换 $y=a(x)u(x)$ 化为常系数线性齐次微分方程. 并用此方法求解方程

$$x^2y''+xy'+\left(x^2-\frac{1}{4}\right)y=0.$$

解 设 $y=a(x)u(x)$，代入方程

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0,$$

得
$$a(x)u''+[2a'(x)+p(x)a(x)]u'$$
$$+[a''(x)+p(x)a'(x)+q(x)a(x)]u=0. \qquad ①$$

要使式①成为常系数线性齐次方程，应选取 $a(x)$，使 u'',u',u 的系数均为常数. 特别地，令 u' 的系数为零，有

$$2a'(x)+p(x)a(x)=0 \Rightarrow a(x)=e^{-\frac{1}{2}\int p(x)dx}.$$

再代入式①，得

$$u''+\left[q(x)-\frac{1}{4}p^2(x)-\frac{1}{2}p'(x)\right]u=0.$$

从而知 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ 经线性齐次变换 $x=a(x)$，$u(x)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\int p(x)\mathrm{d}x}u(x)$，可化为关于 u 的不含一阶导数项的线性齐次方程. 当 u 的系数

$$I(x)=q(x)-\frac{1}{2}p^2(x)-\frac{1}{2}p'(x)$$

为常数时，方程化为常系数方程. 因为方程①在线性齐次变换 $y=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\int p(x)\mathrm{d}x}u(x)$ 下，$I(x)$ 的值不会改变，又称 $I(x)$ 为方程①的不变式. 故当不变式 $I(x)$ 为常数时，方程①可经线性齐次变换 $y=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\int p(x)\mathrm{d}x}u(x)$ 化为常系数线性齐次方程.

对于方程 $x^2y''+xy'+\left(x^2-\frac{1}{4}\right)y=0$，$p(x)=\frac{1}{x}$，$q(x)=1-\frac{1}{4x^2}$，因为

$$I(x)=\left(1-\frac{1}{4x^2}\right)-\frac{1}{4}\frac{1}{x^2}-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=1,$$

所以，令 $y=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}u=\frac{1}{\sqrt{x}}u$，把原方程化为常系数线性齐次方程

$$u''+u=0,$$

其特征方程 $\lambda^2+1=0$ 的特征根为 $\lambda=\pm\mathrm{i}$，求得其通解为

$$u=C_1\cos x+C_2\sin x.$$

代回原变量，得原方程通解为

$$y=C_1\frac{\cos x}{\sqrt{x}}+C_2\frac{\sin x}{\sqrt{x}}.$$

例 8 设 $y=\mathrm{e}^x(C_1\cos x+C_2\sin x)$ 是某二阶常系数线性齐次微分方程的通解，求该齐次方程.

解 **解法一** 由通解知，此齐次方程的特征方程有特征根 $\lambda_{1,2}=1\pm\mathrm{i}$，故特征方程为

$$P(\lambda)=(\lambda-1-\mathrm{i})(\lambda-1+\mathrm{i})=\lambda^2-2\lambda+2=0,$$

即所求齐次方程为 $y''-2y'+2y=0$.

解法二 一般方法是:由

$$y=e^x(C_1\cos x+C_2\sin x),$$

得

$$y'=e^x[(C_2-C_1)\sin x+(C_1+C_2)\cos x],$$

$$y''=e^x[2C_2\cos x-2C_1\sin x],$$

消去上述三式中的任意常数 C_1,C_2,即得齐次方程

$$y''-2y'+2y=0.$$

例 9 具有特解 $y_1=e^{-x},y_2=2xe^{-x},y_3=3e^x$ 的三阶常系数线性齐次方程是(　　).

(A) $y'''-y''-y'+y=0$;　　(B) $y'''+y''-y'-y=0$;

(C) $y'''-6y''+11y'-6y=0$;　(D) $y'''-2y''-y'+2y=0$.

解 由已知特解可知,齐次方程的特征方程有特征根 $\lambda_1=1$, $\lambda_{2,3}=-1$,故特征方程为

$$P(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda+1)^2=\lambda^3+\lambda^2-\lambda-1=0,$$

所以齐次方程为 $y'''+y''-y'-y=0$. 确定选(B).

例 10 设 $y(x)$ 是四阶常系数线性齐次方程,由下列条件确定该方程,并求出通解.

(1) $y(x)$ 的一个解是 x^3e^{-x};

(2) $y(x)$ 的两个解是 $\cos4x$ 和 $\sin3x$;

(3) $y(x)$ 的一个解是 $x\cos4x$.

解 (1) 若 x^3e^{-x} 是方程的解,则由解的构成知,e^{-x},xe^{-x}, x^2e^{-x} 也是方程的解,故方程的通解为

$$y=(C_1+C_2x+C_3x^2+C_4x^3)e^{-x}.$$

$\lambda=-1$ 是所求方程的特征方程的 4 重根,由

$$(\lambda+1)^4=\lambda^4+4\lambda^3+6\lambda^2+4\lambda+1=0$$

知,所求齐次方程为

$$y^{(4)}+4y'''+6y''+4y'+1=0.$$

(2) 若 $\cos4x$ 和 $\sin3x$ 是方程的解,则 $\sin4x$ 和 $\cos3x$ 也是方程的解,故方程的通解为

$$y=C_1\cos 4x+C_2\sin 4x+C_3\cos 3x+C_4\sin 3x,$$

即 $\lambda_{1,2}=\pm 4\mathrm{i}$，$\lambda_{3,4}=\pm 3\mathrm{i}$ 是所求方程的特征方程的特征根，由

$$(\lambda-4\mathrm{i})(\lambda+4\mathrm{i})(\lambda-3\mathrm{i})(\lambda+3\mathrm{i})$$

$$=(\lambda^2+16)(\lambda^2+9)=\lambda^4+25\lambda^2+144=0$$

知，所求齐次方程为

$$y^{(4)}+25y''+144y=0.$$

(3) 若 $x\cos 4x$ 是齐次方程的解，则 $\cos 4x$，$\sin 4x$，$x\sin 4x$ 也是方程的解，故方程的通解为

$$y=C_1\cos 4x+C_2\sin 4x+C_3x\cos 4x+C_4x\sin 4x,$$

即 $\lambda_{1,2}=\pm 4\mathrm{i}$ 是所求方程的特征方程的二重特征根，由

$$(\lambda-4\mathrm{i})^2(\lambda+4\mathrm{i})^2=(\lambda^2+16)^2=\lambda^4+32\lambda^2+256=0$$

知，所求齐次方程为

$$y^{(4)}+32y''+256y=0.$$

第五节　n 阶常系数线性非齐次方程解法

主 要 内 容

n 阶常系数线性非齐次微分方程

$$L[y]=y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}y'+a_ny=f(x) \qquad ①$$

的通解等于其对应的齐次方程

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}y'+a_ny=0 \qquad ②$$

的通解与它本身的一个特解之和.

式①的特解可以由式②的通解用常数变易法求得，也可用下面介绍的待定系数法求得.

1. **叠加原理**　设有非齐次方程 $L[y]=f_1(x)+f_2(x)$，且 $y_1(x)$，$y_2(x)$ 分别是方程 $L[y]=f_1(x)$，$L[y]=f_2(x)$ 的解，则函数 $y_1(x)+y_2(x)$ 是方程 $L[y]=f_1(x)+f_2(x)$ 的解.

2. 设 $f(x)=P_m(x)e^{\alpha x}$

$$=e^{\alpha x}(p_0x^m+p_1x^{m-1}+\cdots+p_{m-1}x+p_m)\ (m\geqslant 1).$$

(1) 当 α 不是特征根时，方程①有形如 $y_1(x)=Q_m(x)e^{\alpha x}$ 的特解，其中

$$Q_m(x)=q_0x^m+q_1x^{m-1}+\cdots+q_{m-1}x+q_m. \qquad ③$$

(2) 当 α 是 $k(\geqslant 1)$ 重特征根时，方程①有形如 $y_1(x)=x^kQ_m(x)e^{\alpha x}$ 的特解，$Q_m(x)$ 是与式③相同形式的 m 次多项式.

$Q_m(x)$ 的系数，可以由待定系数法确定.

3. $f(x)=e^{\alpha(x)}[P_m^{(1)}(x)\cos\beta x+P_m^{(2)}(x)\sin\beta x]$,

其中 $P_m^{(1)}(x)$，$P_m^{(2)}(x)$ 是 x 的次数不高于 m 的多项式，但至少有一个的次数为 m.

依欧拉公式，将 $f(x)$ 改写为

$$f(x)=\widetilde{P}_m^{(1)}(x)e^{(\alpha+i\beta)x}+\widetilde{P}_m^{(2)}(x)e^{(\alpha-i\beta)x},$$

其中 $\widetilde{P}_m^{(1)}(x)$，$\widetilde{P}_m^{(2)}(x)$ 是 x 的 m 次多项式.

(1) 若 $\alpha\pm i\beta$ 不是特征根，则方程①有形如

$$y_1=Q_m^{(1)}(x)e^{(\alpha+i\beta)x}+Q_m^{(2)}(x)e^{(\alpha-i\beta)x} \qquad ④$$

的特解，其中 $Q_m^{(1)}(x)$，$Q_m^{(2)}(x)$ 是 x 的 m 次多项式.

式④也可以写为

$$y_1=e^{\alpha x}[Q_m^{(1)}(x)\cos\beta x+Q_m^{(2)}(x)\sin\beta x]. \qquad ⑤$$

(2) 若 $\alpha\pm i\beta$ 是 $k(\geqslant 1)$ 重特征根，则方程①有形如

$$y_1=x^k[Q_m^{(1)}(x)e^{(\alpha+i\beta)x}+Q_m^{(2)}(x)e^{(\alpha-i\beta)x}] \qquad ⑥$$

或

$$y_1=x^ke^{\alpha x}[Q_m^{(1)}(x)\cos\beta x+Q_m^{(2)}(x)\sin\beta x] \qquad ⑦$$

的特解，其中 $Q_m^{(1)}(x)$，$Q_m^{(2)}(x)$ 是系数待定的 x 的 m 次多项式.

当 $P_m^{(1)}(x)$，$P_m^{(2)}(x)$ 中有一个恒为零时，方程①的特解仍具有式④、⑤、⑥、⑦的形式.

疑 难 解 析

求 n 阶常系数非齐次线性微分方程的通解有哪些步骤？

答 求非齐次线性微分方程通解的步骤是：

(1) 写出对应齐次方程的特征方程；

(2) 求出对应齐次方程的特征方程的特征根；

(3) 写出对应齐次方程的通解；

(4) 求出非齐次线性方程的一个特解；

(5) 写出非齐次线性方程的通解.

其中(1),(2),(3)步的方法已在第四节中了解，关键的是第(4)步. 求常系数非齐次线性微分方程特解常用常数变易法、待定系数法、拉普拉斯变换法与算子解法. 本节将讨论常数变易法与待定系数法求特解的问题，拉普拉斯变换法在第六节中讨论.

方法、技巧与典型例题分析

本节要求了解常系数线性非齐次方程解的结构，会求一般的常系数线性非齐次方程的通解与满足初始条件的特解，特别是二阶常系数线性非齐次方程的两类情形，并能由此讨论非齐次方程求解的一些问题.

例 1 求下列方程的通解：

(1) $y''-7y'+12y=5$； (2) $y''+4y=8$；

(3) $y''+y'+y=3e^{2x}$； (4) $\dfrac{d^2r}{d\varphi^2}-6\dfrac{dr}{d\varphi}+9r=4e^{3\varphi}$；

(5) $y''-8y'+7y=3x^2+7x+8$；

(6) $y''-2y'+4y=(x+2)e^{3x}$.

解 先求出对应齐次方程的通解，再由 $f(x)$ 确定非齐次方程特解形式，然后用待定系数法求出系数，得到非齐次方程的通解.

(1) 对应齐次方程的特征方程为 $\lambda^2-7\lambda+12=0$，特征根为 $\lambda_1=3$，$\lambda_2=4$，故齐次方程的通解为

$$y=C_1e^{3x}+C_2e^{4x}.$$

因为 0 不是特征根，故原方程有形如 $y_1=A$ 的特解. 代入原方程，解得 $A=5/12$. 所以原方程通解为

$$y=C_1e^{3x}+C_2e^{4x}+5/12.$$

(2) 对应齐次方程的特征方程为 $\lambda^2+4=0$，特征根为 $\lambda_{1,2}=\pm 2i$，故齐次方程通解为

$$y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x.$$

因为 0 不是特征根，故原方程有形如 $y_1=A$ 的特解. 代入原方程，解得 $A=2$，所以原方程通解为

$$y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+2.$$

(3) 对应齐次方程的特征方程为 $\lambda^2+\lambda+1=0$，特征根为 $\lambda_{1,2}=-\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{3}i)$，故齐次方程通解为

$$y=e^{-x/2}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right).$$

因为2 不是特征根，故方程有形如 $y_1=Ae^{2x}$ 的特解. 代入原方程，解得 $A=3/7$. 所以原方程通解为

$$y=e^{-x/2}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+\frac{3}{7}e^{2x}.$$

(4) 对应齐次方程的特征方程为 $\lambda^2-6\lambda+9=0$，特征根 $\lambda_{1,2}=3$，故对应齐次方程通解为

$$r=C_1e^{3\varphi}+C_2\varphi e^{3\varphi}.$$

因为3 是二重特征根，故原方程有形如 $r_1=A\varphi^2e^{3\varphi}$ 的特解. 代入原方程，解得 $A=2$. 所以原方程通解为

$$r=(C_1+C_2\varphi)e^{3\varphi}+2\varphi^2e^{3\varphi}.$$

(5) 对应齐次方程的特征方程为 $\lambda^2-8\lambda+7=0$，特征根 $\lambda_1=7$，$\lambda_2=1$，故对应齐次方程通解为

$$y=C_1e^{7x}+C_2e^{x}.$$

因为0 不是特征根，故原方程有形如 $y_1=Ax^2+Bx+C$ 的特解. 代入原方程，解得 $A=3/7$，$B=97/49$，$C=1126/343$. 所以原方程通解为

$$y=C_1e^{7x}+C_2e^{x}+\frac{3}{7}x^2+\frac{97}{49}x+\frac{1126}{343}.$$

(6) 对应齐次方程的特征方程为 $\lambda^2-2\lambda+4=0$，特征根为 $\lambda_{1,2}=1\pm\sqrt{3}\,\mathrm{i}$，故齐次方程的通解为

$$y=\mathrm{e}^x(C_1\cos\sqrt{3}\,x+C_2\sin\sqrt{3}\,x).$$

因为3不是特征根，故原方程有形如 $y_1=(Ax+B)\mathrm{e}^{3x}$ 的特解. 代入原方程，解得 $A=1/7$，$B=10/49$. 所以，原方程通解为

$$y=\mathrm{e}^x(C_1\cos\sqrt{3}\,x+C_2\sin\sqrt{3}\,x)+\left(\frac{1}{7}x+\frac{10}{49}\right)\mathrm{e}^{3x}.$$

例 2 求下列方程的通解：

(1) $\ddot{x}+6\dot{x}+13x=\mathrm{e}^t(t^2-5t+2)$；

(2) $y''+y=5\sin 2x$；

(3) $y''-2y'+10y=x\cos 2x$；

(4) $y''+9y=18\cos 3x-30\sin 3x$.

解 (1) $\ddot{x}=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$，$\dot{x}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$. 对应齐次方程的特征方程为 $\lambda^2+6\lambda+13=0$，特征根为 $\lambda_{1,2}=3\pm 2\mathrm{i}$，故齐次方程的通解为

$$y=\mathrm{e}^{3t}(C_1\cos 2t+C_2\sin 2t).$$

因为1不是特征根，故原方程有形如 $y_1=(At^2+Bt+C)\mathrm{e}^t$ 的特解. 代入原方程，解得 $A=1/8$，$B=-1/2$，$C=-1/32$. 所以，原方程通解为

$$x=\mathrm{e}^{3t}(C_1\cos 2t+C_2\sin 2t)+\left(\frac{1}{8}t^2-\frac{1}{2}t-\frac{1}{32}\right)\mathrm{e}^t.$$

(2) 对应齐次方程的特征方程为 $\lambda^2+1=0$，特征根为 $\lambda_{1,2}=\pm\mathrm{i}$，故齐次方程的通解为

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x.$$

因为 $\pm 2\mathrm{i}$ 不是特征根，故原方程有形如 $y_1=A\cos 2x+B\sin 2x$ 的特解. 代入原方程，解得 $A=0$，$B=-\frac{5}{3}$. 所以，原方程通解为

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x-\frac{5}{3}\sin 2x.$$

(3) 对应齐次方程的特征方程为 $\lambda^2-2\lambda+10=0$，特征根为 $\lambda_{1,2}$

$=1\pm 3\mathrm{i}$，故齐次方程的通解为

$$y=\mathrm{e}^{x}(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x).$$

因为 $\lambda=\pm 2\mathrm{i}$ 不是特征根，故原方程有形如 $y_1=(Ax+B)\cos 2x+(Cx+D)\sin 2x$ 的特解. 代入原方程，解得 $A=\frac{3}{26}$，$B=\frac{29}{338}$，$C=-\frac{1}{13}$，$D=-\frac{1}{169}$. 所以，原方程通解为

$$y=\mathrm{e}^{x}(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x)+\left(\frac{3}{26}x+\frac{29}{338}\right)\cos 2x-\left(\frac{1}{13}x+\frac{1}{169}\right)\sin 2x.$$

(4) 对应齐次方程的特征方程为 $\lambda^2+9=0$，特征根 $\lambda_{1,2}=\pm 3\mathrm{i}$，故齐次方程通解为

$$y=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x.$$

因为 $\pm 3\mathrm{i}$ 都是一重特征根，故原方程有形如 $y_1=x(A\cos 3x+B\sin 3x)$ 的特解. 代入原方程，解得 $A=5$，$B=3$. 所以，原方程通解为

$$y=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x+5x\cos 3x+3x\sin 3x.$$

例 3 求下列方程的通解：

(1) $\ddot{x}-4\dot{x}+4x=\mathrm{e}^{t}+\mathrm{e}^{2t}+1$； (2) $\ddot{x}+x=\sin at, a>0$；

(3) $2y''+5y'=\cos^2 x$； (4) $y''+2y'=3+4\sin 2x$；

(5) $\ddot{x}+x=\sin t-\cos 2t$； (6) $\ddot{x}-2\dot{x}+2x=t\mathrm{e}^{t}\cos t$.

解 本例中的习题要比前两个例题中的习题复杂一些，主要表现在方程右端的函数 $f(x)$ 上. 有的 $f(x)$ 包含两类函数，求解时要考虑叠加原理；有的 $f(x)$ 要进行变形，使之可以利用已知方法求解；有的 $f(x)$ 中含有参数，要进行讨论. 因此，读者在学习时要学会多思考、多分析、多比较，切实掌握方程的求解方法.

(1) 对应齐次方程的特征方程为 $\lambda^2-4\lambda+4=0$，特征根为 $\lambda_{1,2}=2$，故齐次方程的通解为

$$x=(C_1+C_2t)\mathrm{e}^{2t}.$$

因为1，0 都不是特征根，2 是二重特征根，由叠加原理，原方程有形

如$x_1=A+Be^t+Ct^2e^{2t}$的特解．代入原方程，解得$A=\frac{1}{4}$，$B=1$，$C=\frac{1}{2}$．所以，原方程通解为

$$x=(C_1+C_2t)e^{2t}+\frac{1}{4}+e^t+\frac{1}{2}t^2e^{2t}.$$

（2）对应齐次方程的特征方程为$\lambda^2+1=0$，特征根$\lambda_{1,2}=\pm i$，故齐次方程通解为

$$x=C_1\cos t+C_2\sin t.$$

若$a=1$，则因为$\pm i$是特征根，故原方程有形如$x_1=t(A\cos t+B\sin t)$的特解．代入原方程，解得$A=-\frac{1}{2}$，$B=0$．所以，$a=1$时原方程通解为

$$x=C_1\cos t+C_2\sin t-\frac{1}{2}t\cos t.$$

若$a\neq1$，则此时原方程有形如$x_1=A\cos at+B\sin at$的特解．代入原方程，解得$A=0$，$B=1/(1-a^2)$．所以，$a\neq1$时，原方程通解为

$$x=C_1\cos t+C_2\sin t+\frac{1}{1-a^2}\sin at.$$

（3）对应齐次方程的特征方程为$2\lambda^2+5\lambda=0$，特征根$\lambda_1=0$，$\lambda_2=-5/2$，故齐次方程的通解为

$$y=C_1+C_2e^{-5x/2}.$$

由于$f(x)=\cos^2x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x)$，0是特征根，$\pm 2i$不是特征根，故原方程有形如$y_1=Ax+B\cos 2x+C\sin 2x$的特解．代入原方程，解得$A=1/10$，$B=-1/41$，$C=5/164$．所以，原方程通解为

$$y=C_1+C_2e^{-5x/2}+\frac{1}{10}x-\frac{1}{41}\cos 2x+\frac{5}{164}\sin 2x.$$

（4）对应齐次方程的特征方程为$\lambda^2+2\lambda=0$，特征根$\lambda_1=-2$，$\lambda_2=0$，故齐次方程的通解为

$$y=C_1e^{-2x}+C_2.$$

因为 0 是特征根，$\pm 2i$ 不是特征根，由叠加原理，原方程有形如 $y_1=Ax+B\cos 2x+C\sin 2x$ 的特解. 代入原方程，解得 $A=3/2$，$B=-1/2$，$C=-1/2$. 所以，原方程通解为

$$y=C_1e^{-2x}+C_2+\frac{3}{2}A-\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{1}{2}\sin 2x.$$

(5) 对应齐次方程的特征方程为 $\lambda^2+1=0$，特征根 $\lambda_{1,2}=\pm i$，故齐次方程通解为

$$x=C_1\cos t+C_2\sin t.$$

因为 $\pm i$ 是特征根，$\pm 2i$ 不是特征根，由叠加原理，原方程有形如 $x_1=t(A\cos t+B\sin t)+C\cos 2t+D\sin 2t$ 的特解. 代入原方程，解得 $A=-1/2$，$B=0$，$C=1/3$，$D=0$. 所以，原方程通解为

$$x=C_1\cos t+C_2\sin t-\frac{1}{2}t\cos t+\frac{1}{3}\cos 2t.$$

(6) 对应齐次方程的特征方程为 $\lambda^2-2\lambda+2=0$，特征根 $\lambda_{1,2}=1\pm i$，故齐次方程的通解为

$$x=e^t(C_1\cos t+C_2\sin t).$$

因为 $1\pm i$ 是特征根，原方程有形如 $x_1=(At^2+Bt+C)e^t\cos t+(Dt^2+Et+F)e^t\sin t$ 的特解. 代入原方程，解得 $A=0$，$B=1/4$，$C=0$，$D=1/4$，$E=0$，$F=0$. 所以，原方程通解为

$$x=(C_1\cos t+C_2\sin t)e^t+\frac{1}{4}(\cos t+t\sin t)te^t.$$

例 4 求下列方程的通解：

(1) $y''+y=\sin x\cos x$；　　(2) $y''+2ay'+a^2y=e^x$.

解 (1) 对应齐次方程的特征方程为 $\lambda^2+1=0$，特征根 $\lambda_{1,2}=\pm i$，故齐次方程的通解为

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x.$$

由于 $f(x)=\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$，$\pm 2i$ 不是特征根，故原方程有形如 $y_1=A\cos 2x+B\sin 2x$ 的特解. 代入原方程，解得 $A=0$，$B=$

$-1/6$. 所以，原方程通解为

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x-\frac{1}{6}\sin 2x.$$

(2) 方程中含参数 a，要进行讨论.

对应齐次线性方程的特征方程为 $\lambda^2+2a\lambda+a^2=0$，特征根 $\lambda_{1,2}=-a$.

若 $a=-1$，则齐次方程的通解为

$$y=C_1\mathrm{e}^x+C_2x\mathrm{e}^x.$$

因为 1 是二重特征根，故原方程为形如 $y_1=Ax^2\mathrm{e}^x$ 的特解. 代入原方程，解得 $A=1/2$. 所以，原方程的通解为

$$y=\left(C_1+C_2x+\frac{1}{2}x^2\right)\mathrm{e}^x.$$

若 $a\neq-1$，则齐次方程的通解为

$$y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{-ax}.$$

因为1 不是特征根，故原方程有形如 $y_1=A\mathrm{e}^x$ 的特解. 代入原方程，解得 $A=\frac{1}{(1+a)^2}$. 所以，原方程通解为

$$y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{-ax}+\frac{1}{(1+a)^2}\mathrm{e}^x.$$

例 5 用常数变易法求下列方程的通解：

(1) $y''-y'=\frac{2\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x-1}$；　　(2) $y''-2y'+y=\frac{\mathrm{e}^x}{x}$.

解 先求出对应齐次方程的通解，再将通解中常数变易为函数，确定函数后即可求得原方程通解.

(1) 对应齐次方程的特征方程为 $\lambda^2-\lambda=0$，特征根 $\lambda_1=1,\lambda_2=-1$，故齐次方程通解为

$$y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{-x}.$$

设原方程有形如 $y_1=C_1(x)\mathrm{e}^x+C_2(x)\mathrm{e}^{-x}$的特解，则$C_1'(x)$，$C_2'(x)$满足代数方程组

$$\begin{cases} C_1'(x)e^x+C_2'(x)e^{-x}=0, \\ C_1'(x)e^x-C_2'(x)e^{-x}=\dfrac{2e^x}{e^x-1}. \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} C_1'(x)=\dfrac{1}{e^x-1}, \\ C_2'(x)=-\dfrac{e^{2x}}{e^x-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1(x)=\ln|e^x-1|-x, \\ C_2(x)=-e^x-\ln|e^x-1|, \end{cases}$

所以原方程通解为

$$y=C_1e^x+C_2e^{-x}+(e^x-e^{-x})\ln|e^x-1|-xe^x-1.$$

(2) 对应齐次方程的特征方程为 $\lambda^2-2\lambda+1=0$，特征根 $\lambda_{1,2}=1$，故齐次方程的通解为

$$y=C_1e^x+C_2xe^x.$$

设原方程有形如 $y_1=C_1(x)e^x+C_2(x)xe^x$ 的特解，则 $C_1'(x)$，$C_2'(x)$ 满足代数方程组

$$\begin{cases} C_1'(x)e^x+C_2'(x)xe^x=0, \\ C_1'(x)e^x+C_2'(x)e^x+C_2'(x)xe^x=\dfrac{e^x}{x}. \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} C_1'(x)=-1, \\ C_2'(x)=\dfrac{1}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1(x)=-x, \\ C_2(x)=\ln|x|, \end{cases}$

所以，原方程通解为

$$y=e^x(C_3x+C_1+x\ln|x|) \quad (C_3=C_2-1).$$

例 6 在方程 $y''+3y'+2y=f(x)$ 中，$f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$. 证明：已知方程的任一解 $y(x)$，均有 $\lim\limits_{x\to+\infty}y(x)=0$.

证 对应齐次方程的特征方程为 $\lambda^2+3\lambda+2=0$，特征根 $\lambda_1=-2$，$\lambda_2=-1$，故齐次方程通解为

$$y=C_1e^{-2x}+C_2e^{-x}.$$

设已知方程有形如 $y_1=C_1(x)e^{-2x}+C_2(x)e^{-x}$ 的特解，则 $C_1'(x)$，$C_2'(x)$ 满足代数方程组

$$\begin{cases}C_1'(x)e^{-2x}+C_2'(x)e^{-x}=0,\\ -2C_1'(x)e^{-2x}-C_2'(x)e^{-x}=f(x),\end{cases}$$

解得 $$\begin{cases}C_1'(x)=-e^{2x}f(x),\\ C_2'(x)=e^{x}f(x)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C_1(x)=-\int_0^x e^{2t}f(t)dt,\\ C_2(x)=\int_0^x e^{t}f(t)dt,\end{cases}$$

所以,已知方程的通解为

$$y=C_1e^{-2x}+C_2e^{-x}-e^{-2x}\int_0^x e^{2t}f(t)dt+e^{-x}\int_0^x e^{t}f(t)dt.$$

因为 $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x e^{t}f(t)dt}{e^{x}}\xlongequal{L'}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}f(x)}{e^{x}}=\lim_{x\to+\infty}f(x)=0,$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x e^{2t}f(t)dt}{e^{2x}}\xlongequal{L'}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}f(x)}{2e^{2x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}f(x)=0,$$

所以 $$\lim_{x\to+\infty}y(x)=0.$$

即方程的任一解 $y(x)$,当 $x\to+\infty$ 时,均有 $y(x)$ 趋于零.

例 7 设 $y=y(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内具有二阶导数,且 $y'\neq0$, $x=x(y)$ 是 $y=y(x)$ 的反函数.

(1) 将 $x=x(y)$ 满足的微分方程 $\frac{d^2x}{dy^2}+(y+\sin x)\left(\frac{dx}{dy}\right)^3=0$ 变换为 $y=y(x)$ 满足的微分方程.

(2) 求变换后微分方程满足初始条件 $y(0)=0,y'(0)=3/2$ 的解.

解 (1) 因为 $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{y'}$,所以 $y'\frac{dx}{dy}=1$,两端对 x 求导,得

$$y''\frac{dx}{dy}+\frac{d^2x}{dy^2}(y')^2=0,$$

即 $$\frac{d^2x}{dy^2}=-\frac{dx}{dy}\frac{y''}{(y')^2}=-\frac{y''}{(y')^3}.$$

代入原方程,得 $y=y(x)$ 满足的微分方程为

$$y''-y=\sin x. \qquad ①$$

(2) 对应齐次方程的特征方程为$\lambda^2-1=0$，特征根$\lambda_1=1,\lambda_2=-1$，故齐次方程的通解为

$$y=C_1e^x+C_2e^{-x}.$$

因为$\pm i$不是特征根，故原方程有形如$y_1=A\cos x+B\sin x$的特解．代入(1)中方程①，解得$A=0,B=-1/2$，所以，(1)中方程①的通解为

$$y=C_1e^x+C_2e^{-x}-\frac{1}{2}\sin x.$$

代入$y(0)=0,y'(0)=3/2$，得$C_1=1,C_2=-1$．故所求初值问题的解为

$$y(x)=e^x-e^{-x}-\frac{1}{2}\sin x.$$

例8 验证函数

$$y(x)=1+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^6}{6!}+\cdots+\frac{x^{3n}}{(3n)!}+\cdots,\quad -\infty<x<+\infty$$

满足微分方程$y''+y'+y=e^x$，并用此求幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}$的和函数．

解 因为

$$y=1+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^6}{6!}+\cdots+\frac{x^{3n}}{(3n)!}+\cdots,$$

$$y'=\frac{x^2}{2!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+\frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!}+\cdots,$$

$$y''=x+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!}+\cdots,$$

所以

$$y''+y'+y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n}=e^x. \qquad ①$$

显然，幂级数的和函数是方程①满足初始条件$y(0)=1,y'(0)=0$的特解．

对应齐次方程的特征方程为$\lambda^2+\lambda+1=0$，特征根$\lambda_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$，故齐次方程通解为

$$y=\mathrm{e}^{-x/2}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right).$$

因为1不是特征根，故方程①有形如$y_1=A\mathrm{e}^x$的特解. 代入方程①，解得$A=\frac{1}{3}$. 故方程$y''+y'+y=\mathrm{e}^x$的通解为

$$y=\mathrm{e}^{-x/2}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+\frac{1}{3}\mathrm{e}^x. \qquad ②$$

因为若$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}$，则有$y(0)=1,y'(0)=0$，代入式②，解得$C_1=\frac{2}{3},C_2=0$. 所以幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}$的和函数为

$$y(x)=\frac{2}{3}\mathrm{e}^{-x/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{3}\mathrm{e}^x,\quad -\infty<x<+\infty.$$

例9 设$y=y(x)$是$y''+py'+qy=\mathrm{e}^{3x}$满足初始条件$y(0)=y'(0)=0$的特解，求$\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x^2)}{y(x)}$.

解 因为p,q是常系数，由$y(0)=0,y'(0)=0$可知$y''(0)=1$. 于是

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x^2)}{y(x)}\xlongequal{L'}\lim_{x\to0}\frac{2x}{1+x^2}\cdot\frac{1}{y'}\xlongequal{L'}\lim_{x\to0}\frac{2}{2xy'+(1+x^2)y''}=2.$$

例10 利用代换$y=\frac{u}{\cos x}$化简方程

$$y''\cos x-2y'\sin x+3y\cos x=\mathrm{e}^x,$$

并求出其通解.

解 因为$u=y\cos x$，所以

$$u'=y'\cos x-y\sin x,$$
$$u''=y''\cos x-2y'\sin x-y\cos x,$$

从而，原方程化为

$$u''+4u=\mathrm{e}^x. \qquad ①$$

方程①对应齐次方程的特征方程为$\lambda^2+4=0$，特征根$\lambda_{1,2}=\pm2\mathrm{i}$，故齐次方程通解为

$$u=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x.$$

因为1不是特征根，故方程①有形如$u_1=Ae^x$的特解. 代入方程①，解得$A=-\frac{1}{5}$. 所以，方程①的通解为

$$u=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x-\frac{1}{5}e^x.$$

代回原变量，得原方程通解为

$$y=C_1\frac{\cos 2x}{\cos x}+2C_2\sin x+\frac{1}{5\cos x}e^x.$$

例11 设二阶常系数线性微分方程$y''+py'+qy=se^x$的一个特解为$y_1=e^{2x}+(1+x)e^x$，试确定常数p,q,s，并求该方程的通解.

解 将y_1代入题给方程，比较各项系数，得方程组

$$\begin{cases}4+2p+q=0,\\3+2p+q=s,\\p+q+1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}p=-3,\\q=2,\\s=-1,\end{cases}$$

则原方程化为 $$y''-3y'+2y=-e^x.$$

对应齐次方程的特征方程为$\lambda^2-3\lambda+2=0$，特征根$\lambda_1=1,\lambda_2=2$，故齐次方程的通解为

$$y=C_1e^x+C_2e^{2x}.$$

于是，原方程的通解为

$$y=C_1e^x+C_2e^{2x}+e^{2x}+(1+x)e^x.$$

例12 设函数$\varphi(x)$连续，且满足

$$\varphi(x)=e^x+\int_0^x t\varphi(t)dt-x\int_0^x\varphi(t)dt, \quad ①$$

求$\varphi(x)$.

解 式①是$\varphi(x)$的积分方程，对等式两端求导，得

$$\begin{cases}\varphi'(x)=e^x-\int_0^x\varphi(t)dt,\\\varphi''(x)=e^x-\varphi(x),\end{cases}\quad 且\quad \varphi(0)=1,\varphi'(0)=1,$$

即 $$\varphi''+\varphi=e^x. \quad ②$$

式②对应齐次方程的特征方程为$\lambda^2+1=0$，特征根$\lambda_{1,2}=\pm i$，故齐次方程的通解为

$$\varphi=C_1\cos x+C_2\sin x.$$

因为1不是特征根，故方程②有形如$\varphi_1=Ae^x$的特解．代入原方程②，解得$A=1/2$. 所以，方程②的通解为

$$\varphi=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{1}{2}e^x.$$

由$\varphi(0)=1,\varphi'(0)=1$，解得$C_1=1/2,C_2=1/2$. 故

$$\varphi=\frac{1}{2}(\cos x+\sin x+e^x).$$

第六节　拉普拉斯变换

主 要 内 容

1. **定义 3.4**　设函数$f(t)$在区间$[0,+\infty)$上有定义，如果含参变量s的无穷积分

$$\int_0^{+\infty}e^{-st}f(t)dt=\lim_{T\to+\infty}\int_0^T e^{-st}f(t)dt$$

对s的某一取值范围是收敛的，则称

$$F(s)=\int_0^{+\infty}e^{-st}f(t)dt \qquad ①$$

为函数$f(t)$的**拉普拉斯变换**，$f(t)$称为**原函数**，$F(s)$称为**象函数**，并且记为

$$\mathscr{L}[f(t)]=F(s),$$

其中，s是复数．但在一般问题中，s取实数即可，且设$f(t)$在$[0,+\infty)$上总有定义．

2. **定理 3.11**　如果函数$f(t)$在区间$[0,+\infty)$上逐段连续，且存在数$M>0,s_0\geqslant0$，使得对于一切$t\geqslant0$，有$|f(t)|<Me^{s_0t}$，则当$s>s_0$时，$F(s)$存在．

3. 拉普拉斯变换的几个性质.

(1) **线性性质** 设函数 $f_1(t)$,$f_2(t)$满足定理3.11的条件,则在它们的象函数的定义域的共同部分上,有

$$\mathscr{L}[C_1f_1(t)+C_2f_2(t)]=C_1\mathscr{L}[f_1(t)]+C_2\mathscr{L}[f_2(t)],$$

其中 C_1,C_2 为任意常数.

(2) **原函数的微分性质** 如果 $f'(t)$,$f''(t)$,$\cdots$,$f^{(n)}(t)$均满足定理3.11的条件,则

$$\mathscr{L}[f'(t)]=s\mathscr{L}[f(t)]-f(0).$$

更一般地,有

$$\mathscr{L}[f^{(n)}(t)]=s^n\mathscr{L}[f(t)]-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)-\cdots-f^{(n-1)}(0).$$

(3) **象函数的微分性质** 如果 $\mathscr{L}[f(t)]=F(s)$,则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}F(s)=-\int_0^{+\infty}t\mathrm{e}^{-st}f(t)\mathrm{d}t=-\mathscr{L}[tf(t)],$$

更一般地,有

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}s^n}F(s)=(-1)^n\int_0^{+\infty}t^n\mathrm{e}^{-st}f(t)\mathrm{d}t=(-1)^n\mathscr{L}[t^nf(t)].$$

(4) **原函数的积分性质** 如果 $\mathscr{L}[f(t)]=F(s)$,则

$$\mathscr{L}\left[\int_0^t f(t)\mathrm{d}t\right]=\frac{1}{s}F(s).$$

(5) **象函数的积分性质** 如果 $\mathscr{L}[f(t)]=F(s)$,则

$$\mathscr{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right]=\int_s^{+\infty}F(s)\mathrm{d}s.$$

(6) **位移性质** 如果 $\mathscr{L}[f(t)]=F(s)$,则

$$\mathscr{L}[\mathrm{e}^{at}f(t)]=F(s-a).$$

(7) **延迟性质** 如果 $\mathscr{L}[f(t)]=F(s)$,又 $t<0$ 时,$f(t)<0$,则对任一非负实数 τ,有

$$\mathscr{L}[f(t-\tau)]=\mathrm{e}^{-s\tau}F(s).$$

4. **初值定理** 若 $\mathscr{L}[f(t)]=F(s)$,且 $\lim\limits_{s\to\infty}sF(s)$存在,则

$$\lim_{t\to 0}f(t)=\lim_{s\to+\infty}sF(s)\quad 或\quad f(0)=\lim_{s\to+\infty}sF(s).$$

5. 由象函数求原函数的运算称为**拉普拉斯逆变换**，记为

$$\mathscr{L}^{-1}[Y(s)]=y(t).$$

常用的拉普拉斯逆变换可以通过查表3.1求得.

表 3.1

序号	原函数 $f(t)$	象函数 $F(s)=\int_0^{+\infty} e^{-st}f(t)dt$	$F(s)$的定义域
1	1	$\frac{1}{s}$	$s>0$
2	t	$\frac{1}{s^2}$	$s>0$
3	t^n（n 是正整数）	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$s>0$
4	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$s>a$
5	te^{at}	$\frac{1}{(s-a)^2}$	$s>a$
6	$t^n e^{at}$（n 是正整数）	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	$s>a$
7	$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$s>0$
8	$\cos\omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$s>0$
9	$\mathrm{sh}\,\omega t$	$\frac{\omega}{s^2-\omega^2}$	$s>\omega$
10	$\mathrm{ch}\,\omega t$	$\frac{s}{s^2-\omega^2}$	$s>\omega$
11	$t\sin\omega t$	$\frac{2s\omega}{(s^2+\omega^2)^2}$	$s>0$
12	$t\cos\omega t$	$\frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$	$s>0$
13	$e^{at}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$	$s>a$
14	$e^{at}\cos\omega t$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$	$s>a$
15	$te^{at}\sin\omega t$	$\frac{2\omega(s-a)}{[(s-a)^2+\omega^2]^2}$	$s>a$
16	$te^{at}\cos\omega t$	$\frac{(s-a)^2-\omega^2}{[(s-a)^2+\omega^2]^2}$	$s>a$

疑难解析

怎样用拉普拉斯变换法求解微分方程的初值问题？要注意哪些问题？

答 拉普拉斯变换是积分变换的一种. 所谓积分变换，就是通过积分运算，把一个函数变成另一个函数的变换，一般是含有参变量 α 的积分

$$F(\alpha)=\int_a^b f(t)K(t,\alpha)\mathrm{d}t,$$

其中，$K(t,\alpha)$是一个确定的二元函数，称为**积分变换的核**. $f(t)$称为原函数，$F(\alpha)$称为$f(t)$的**象函数**，在一定条件下，它们是一一对应且变换是可逆的. 当选取不同的积分域和变换核时，就得到不同名称的积分变换. 拉普拉斯变换的积分域是$[0,+\infty)$，变换核是函数e^{-st}.

用拉普拉斯变换法求解初值问题的基本思想是：先利用拉普拉斯变换将已知方程化为代数方程，再求解代数方程，然后通过拉普拉斯逆变换求得已知初值问题的解. 其流程如图 3.1 所示.

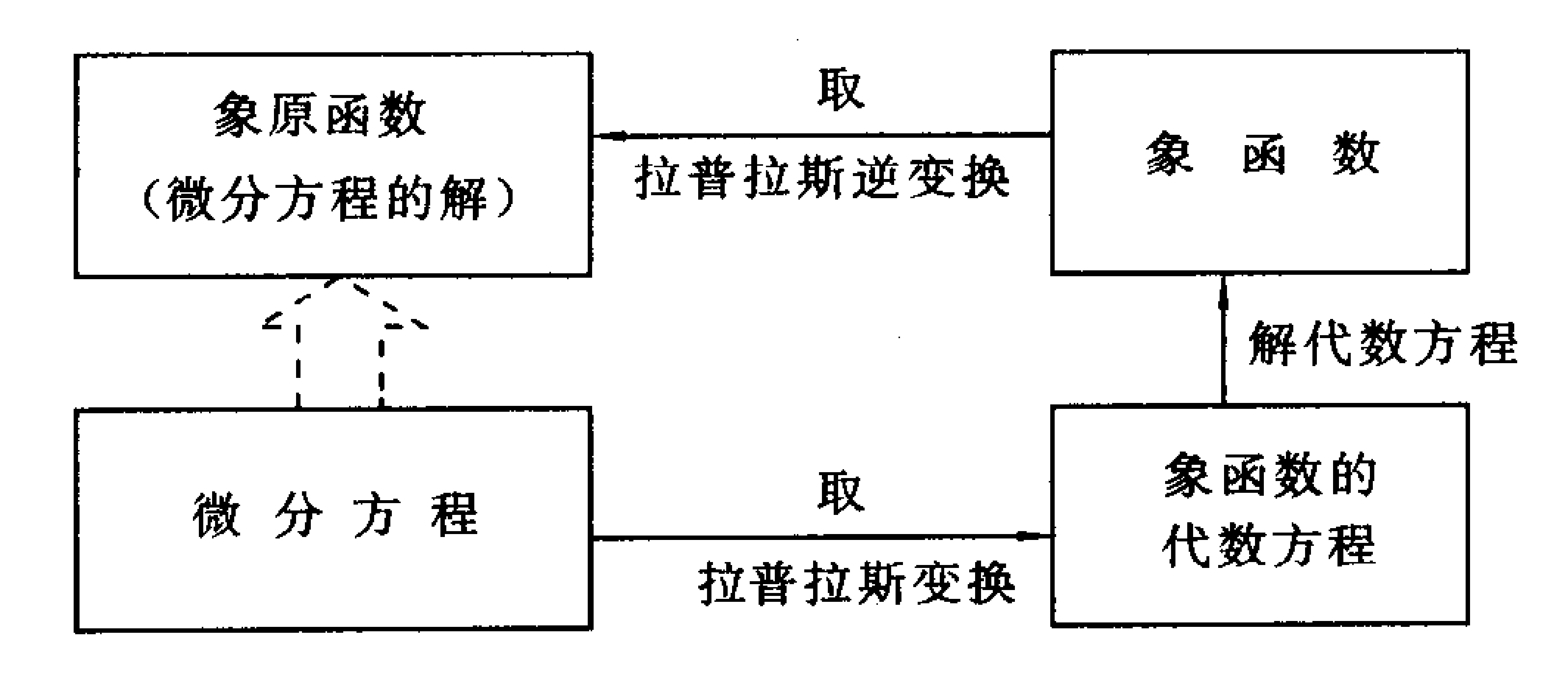


图 3.1

拉普拉斯变换法不仅可以求解 n 阶常系数线性微分方程的初值问题，还可以求解某些偏微分方程与积分方程问题.

使用拉普拉斯变换法时要注意以下问题.

(1) 所讨论函数 $f(t)$ 的拉普拉斯变换是否存在，即 $f(t)$ 是否满足定理 3.11 的条件. 对于在整个区间 $[0,+\infty)$ 上有定义的函数，不一定在整个区间上满足定理 3.11 的条件，很可能只在 s 的不同区间上有定义. 例如 $f(t)=1$，对 $s>0$ 有定义；而 $f(t)=e^{at}$，对 $s>a$ 有定义.

(2) 在拉普拉斯变换中，参变量 s 是复数. 但对于常系数线性微分方程来说，只需考虑 s 是实数的情形.

(3) 由象函数 $Y(s)$ 求原函数 $y(t)$，称为拉普拉斯逆变换. 如果直接去求，要进行复杂的复变函数积分. 一般做法是，将 $Y(s)$ 分解为最简分式，利用拉普拉斯变换表查得各个最简分式的原函数，即可得到 $y(t)$. 因此，读者必须熟悉拉普拉斯变换表. 表 3.1 不够用时，可查数学手册.

(4) 在求解的过程中，同时用上初始条件，求出的结果就是特解，可以避免先求通解再由初始条件确定任意常数的运算.

方法、技巧与典型例题分析

例 1 求下列函数的拉普拉斯变换：

(1) $g(t)=\begin{cases}0, & 0\leqslant t<5,\\ t-3, & t>5;\end{cases}$

(2) $g(t)=\begin{cases}0, & 0\leqslant t<\dfrac{\pi}{2},\\ \sin t, & t\geqslant\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$

解 (1) 将 $g(t)$ 表示为

$$g(t)=\begin{cases}0, & 0\leqslant t<5,\\ (t-5)+2, & t>5.\end{cases}$$

由
$$F(s)=\mathscr{L}[t+2]=\mathscr{L}[t]+2\mathscr{L}[1]=\frac{1}{s^2}+\frac{2}{s},$$

得
$$\mathscr{L}[g(t)]=e^{-5t}\left(\frac{1}{s^2}+\frac{2}{s}\right).$$

这里，应用了延迟性质，即令$f(t)=t+2, t>0$，所以$\tau=5$. 从而得到上述结果.

(2) 将$g(t)$表示为

$$g(t)=\begin{cases} 0, & 0\leqslant t<\dfrac{\pi}{2}, \\ \cos\left(t-\dfrac{\pi}{2}\right), & t\geqslant\dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

令$f(t)=\cos t, t\geqslant 0$，所以$\tau=\pi/2$，由

$$F(s)=\mathscr{L}[\cos t]=\frac{s}{s^2+1},$$

得
$$\mathscr{L}[g(t)]=\mathrm{e}^{-\pi s/2}F(s)=\frac{s}{s^2+1}\mathrm{e}^{-\pi s/2}.$$

例 2 求下列函数的拉普拉斯逆变换：

(1) $F(s)=\dfrac{1}{s^2(s+1)}$； (2) $F(s)=\dfrac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$；

(3) $F(s)=\dfrac{1}{(s+1)(s-2)(s+3)}$；(4) $F(s)=\dfrac{s+1}{s^2+s+1}\mathrm{e}^{-\pi s}$.

解 一般要先分解因式，再通过查表求得象原函数.

(1) $\dfrac{1}{s^2(s+1)}=\dfrac{-1}{s}+\dfrac{1}{s^2}+\dfrac{1}{s+1}$,

所以
$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2(s+1)}\right]=-1+t+\mathrm{e}^{-t}.$$

(2) $f(t)=\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}\right]=t\cos at$.

(3) $\dfrac{1}{(s+1)(s-2)(s+3)}=\dfrac{-1/6}{s+1}+\dfrac{1/15}{s-2}+\dfrac{1/10}{s+3}$,

所以
$$f(t)=-\frac{1}{6}\mathrm{e}^{-t}+\frac{1}{15}\mathrm{e}^{2t}+\frac{1}{10}\mathrm{e}^{-3t}.$$

(4) $\dfrac{s+1}{s^2+s+1}=\dfrac{s+1/2}{(s+1/2)^2+3/4}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\dfrac{\sqrt{3}/2}{(s+1/2)^2+3/4}$,

所以 $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{s+1}{s^2+s+1}\right]=\mathrm{e}^{-t/2}\left(\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}t+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right)$.

又由 $\mathscr{L}^{-1}\left[\mathrm{e}^{-\pi s}\dfrac{s+1}{s^2+s+1}\right]$

$$=\begin{cases} e^{-(t-\pi)/2}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right), & t>\pi, \\ 0, & t<\pi. \end{cases}$$

例3 用拉普拉斯变换法，求下列各方程的初值解：

(1) $\dot{x}-x=e^{2t}, x(0)=0$；

(2) $\dddot{x}+3\ddot{x}+3\dot{x}+x=1, x(0)=\dot{x}(0)=\ddot{x}(0)=0$；

(3) $\ddot{x}+2\dot{x}+x=e^{-t}, x(0)=\dot{x}(0)=0$.

解 (1) 设$\mathscr{L}[x(t)]=X(s)$. 对方程两端同时取拉普拉斯变换，因为

$$\mathscr{L}[\dot{x}-x]=\mathscr{L}[\dot{x}]-\mathscr{L}[x]=X(s)(s-1),$$

$$\mathscr{L}[e^{2t}]=\frac{1}{s-2},$$

所以 $$X(s)=\frac{1}{(s-1)(s-2)}=\frac{1}{s-2}-\frac{1}{s-1}.$$

故 $$x(t)=e^{2t}-e^{t}.$$ (用表3.1中公式4)

(2) 设$\mathscr{L}[x(t)]=X(s)$. 对方程两端同时取拉普拉斯变换，因为

$$\mathscr{L}[\dddot{x}+3\ddot{x}+3\dot{x}+x]=X(s)(s^3+3s^2+3s+1)=X(s)(s+1)^3,$$

$$\mathscr{L}[1]=\frac{1}{s},$$

得 $$X(s)=\frac{1}{s(s+1)^3}=\frac{1}{s}-\left[\frac{1}{(s+1)^3}+\frac{1}{(s+1)^2}+\frac{1}{s+1}\right].$$

得 $$x(t)=1-\frac{1}{2}(t^2+2t+2)e^{-t}.$$ (用表3.1中公式1,5)

(3) 设$\mathscr{L}[x(t)]=X(s)$. 对方程两端同时取拉普拉斯变换，因为

$$\mathscr{L}[\ddot{x}+2\dot{x}+x]=X(s)(s^2+2s+1)=X(s)(s+1)^2,$$

$$\mathscr{L}[e^{-t}]=\frac{1}{s+1},$$

得 $$X(s)=\frac{1}{(s+1)^3}.$$

得 $$x(t)=\frac{1}{2}t^2e^{-t}.\quad（用表3.1中公式5）$$

例4 用拉普拉斯变换法，求下列方程的初值解：

(1) $\ddot{x}+a^2x=b\sin at, x(0)=x_0, \dot{x}(0)=x_0$；

(2) $\ddot{y}-3\dot{y}+2y=e^{3t}, y(0)=1, \dot{y}(0)=0$；

(3) $\ddot{y}-2\dot{y}+y=te^t, y(0)=0, \dot{y}(0)=0$.

解 (1) 设$\mathscr{L}[x(t)]=X(s)$. 对方程两端同时取拉普拉斯变换，因为

$$\mathscr{L}[\ddot{x}+a^2x]=X(s)(s^2+a^2)-sx_0-x_0,$$

$$\mathscr{L}[b\sin at]=\frac{ab}{s^2+a^2},$$

得 $$X(s)=\frac{ab}{(s^2+a^2)^2}+\frac{(s+1)x_0}{s^2+a^2}.$$

得 $$x(t)=\frac{b}{2a^2}\sin at-\frac{b}{2a}t\cos at+x_0\cos at+\frac{x_0}{a}\sin at$$

$$=\frac{1}{2a^2}[(b+2ax_0)\sin at+(2ax_0-abt)\cos at].$$

(2) 设$\mathscr{L}[y(t)]=Y(s)$. 对方程两端同时取拉普拉斯变换，因为

$$\mathscr{L}[\ddot{y}-3\dot{y}+2y]=Y(s)(s^2-3s+2)-s+3,$$

$$\mathscr{L}[e^{3t}]=\frac{1}{s-3},$$

得 $$Y(s)=\frac{s^2-6s+10}{(s-1)(s-2)(s-3)}=\frac{5/2}{s-1}-\frac{2}{s-2}+\frac{1/2}{s-3},$$

得 $$y(t)=\frac{5}{2}e^t-2e^{2t}+\frac{1}{2}e^{3t}.$$

(3) 设$\mathscr{L}[y(t)]=Y(s)$. 对方程两端同时取拉普拉斯变换，因为

$$\mathscr{L}[\ddot{y}-2\dot{y}+1]=Y(s)(s^2-2s+1)=Y(s)(s-1)^2,$$

$$\mathscr{L}[te^t]=\frac{1}{(s-1)^2},$$

得 $$Y(s)=\frac{1}{(s-1)^4}.$$

得 $$y(t)=\frac{1}{3!}t^3e^t=\frac{1}{6}t^3e^t.$$

例5 用拉普拉斯变换法，求下列初值问题的解：

(1) $y''+2y'+5y=h(t), y(0)=y'(0)=0,$

其中 $$h(t)=\begin{cases}1, & 0\leqslant t<\pi,\\ 0, & t\geqslant\pi;\end{cases}$$

(2) $y''+y=h(t), y(0)=y'(0)=0,$

其中 $$h(t)=\begin{cases}0, & 0\leqslant t<1,\\ 2, & t\geqslant 1.\end{cases}$$

解 (1) 设 $\mathscr{L}[y(t)]=Y(s)$. 对方程两端同时取拉普拉斯变换，因为

$$\mathscr{L}[y''+2y'+5y]=Y(s)(s^2+2s+5),$$

$$\mathscr{L}[h(t)]=\int_0^{+\infty}e^{-st}h(t)dt=\int_0^{\pi}e^{-st}dt=\frac{1}{s}(1-e^{-\pi s}),$$

得 $$Y(s)=\frac{1-e^{-\pi t}}{s(s^2+2s+5)}$$
$$=\left[\frac{1}{5}\frac{1}{s}-\frac{1}{5}\frac{s+1}{(s+1)^2+4}-\frac{1}{10}\frac{2}{(s+1)^2+4}\right](1-e^{-\pi t}).$$

而 $$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2+2s+5)}\right]=\frac{1}{5}-\left(\frac{1}{5}\cos2t+\frac{1}{10}\sin2t\right)e^{-t},$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2+2s+5)}e^{-\pi s}\right]$$
$$=\begin{cases}0, & 0\leqslant t<\pi,\\ \frac{1}{5}-\left[\frac{1}{5}\cos2(t-\pi)+\frac{1}{10}\sin2(t-\pi)\right]e^{-(t-\pi)}, & t\geqslant\pi,\end{cases}$$

故 $$y(t)=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2+2s+5)}(1-e^{-\pi s})\right]$$
$$=\begin{cases}\frac{1}{5}\left[1-e^{-t}\left(\cos2t+\frac{1}{2}\sin2t\right)\right], & 0\leqslant t<\pi,\\ \frac{1}{5}e^{-t}\left[(e^{\pi}-1)\cos2t+\frac{1}{2}(e^{\pi}-1)\sin2t\right], & t\geqslant\pi.\end{cases}$$

(2) 设$\mathscr{L}[y(t)]=Y(s)$. 对方程两端同时取拉普拉斯变换，因为

$$\mathscr{L}[y''+y]=Y(s)(s^2+1),$$

$$\mathscr{L}[h(t)]=\frac{2}{s}e^{-t},$$

所以 $$Y(s)=e^{-t}\frac{1}{s(s^2+1)}=e^{-t}\left(\frac{2}{s}-\frac{2s}{s^2+1}\right).$$

而 $$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{2}{s}-\frac{2s}{s^2+1}\right]=2-2\cos t,$$

故 $$y(t)=\mathscr{L}^{-1}\left[e^{-t}\frac{1}{s(s^2+1)}\right]=\begin{cases}0, & 0\leqslant t<1,\\ 2-2\cos(t-1), & t\geqslant 1.\end{cases}$$

例 6 求解下列初值问题：

(1) $\frac{d^2y}{dt^2}+4\frac{dy}{dt}+13y=18e^{-2t}\sin 3t, y(0)=0, y'(0)=0$;

(2) $\frac{d^3y}{dt^3}+8y=32t^3-16t, y(0)=y'(0)=y''(0)=0$.

解 因为n阶微分方程可写为

$$\frac{d^ny}{dt^n}+p_1\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+p_2\frac{d^{n-2}y}{dt^{n-2}}+\cdots+p_{n-1}\frac{dy}{dt}+p_ny=h(t).$$

设$\mathscr{L}[y(t)]=Y(s)$，则

(1) $\mathscr{L}[y''+4y'+13y]=Y(s)(s^2+4s+13)$,

$$\mathscr{L}[h(t)]=\frac{54}{(s+2)^2+9},$$

所以 $$Y(s)=\frac{54}{[(s+2)^2+9]^2},$$

$$y(t)=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{54}{[(s+2)^2+9]^2}\right]=e^{-2t}(\sin 3t-3t\cos 3t).$$

(2) $\mathscr{L}[y'''+8y]=Y(s)(s^3+8)$,

$$\mathscr{L}[h(t)]=\frac{192-16s^2}{s^4},$$

所以

$$Y(s)=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{192-16s^2}{s^4(s^3+8)}\right]$$

$$=\mathscr{L}^{-1}\left[-\frac{3}{s}-\frac{2}{s^2}+\frac{24}{s^4}+\frac{2}{3}\frac{1}{s+2}+\frac{7}{3}\frac{s}{s^2-2s+4}-\frac{4}{3}\frac{1}{s^2-2s+4}\right]$$

$$=-4t^3-2t-3+\frac{2}{3}e^{-2t}+\frac{1}{3}e^t(7\cos\sqrt{3}t+\sqrt{3}\sin\sqrt{3}t).$$

例 7 求解下列方程：

(1) $\frac{d^3y}{dt^3}-2\frac{d^2y}{dt^2}+5\frac{dy}{dt}=0, y(0)=0, y'(0)=1, y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$;

(2) $\frac{d^4y}{dt^4}+4y=4, y(0)=y'(0)=y''(0)=y'''(0)=0.$

解 (1) $h(t)=0, \mathscr{L}[h(t)]=0.$

$$\mathscr{L}[y'''-2y''+5y']=(s^3-2s^2+5s)Y(s)-s+2-C_3,$$

$$y(t)=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s-2+C_3}{s^3-2s^2+5s}\right]$$

$$=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{5}\frac{C_3-2}{s}+\frac{2-C_3}{5}\frac{s}{s^2-2s+5}+\frac{2C_3+1}{5}\frac{1}{s^2-2s+5}\right]$$

$$=\frac{C_3-2}{5}+\frac{2-C_3}{5}e^t\left(\cos 2t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)+\frac{2C_3+1}{5}\frac{1}{2}e^t\sin 2t.$$

代入条件 $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$，得 $C_3=2$，故

$$y(t)=\frac{1}{2}e^t\sin 2t.$$

注 当方程为三阶微分方程时，$y(t)=\mathscr{L}^{-1}(\ )$式中，分子为 $C_1(s^2+p_1s+p_2)+C_2(s+p)+C_3$，其中 $C_1=y(0)$，$C_2=y'(0)$，$C_3=y''(0)$，所以$\mathscr{L}^{-1}(\ )$中分子为$s-2+C_3$. 当方程为四阶微分方程时，$\mathscr{L}^{-1}(\ )$中分子为 $C_1(s^3+p_1s^2+p_2s+p_3)+C_2(s^2+p_1s+p_2)+C_3(s+p_1)+C_4$.

(2) $h(t)=4, \mathscr{L}[h(t)]=\frac{4}{s}$,

$$\mathscr{L}[y^{(4)}+4]=(s^4+4)Y(s).$$

因为 $C_1=C_2=C_3=C_4=0$，所以

$$y(t)=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s^4-4)}\right]=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{4}{s}\frac{1}{s^4+4}\right]$$

$$=4\int_0^t\frac{1}{4}(\text{ch}u\sin u-\text{sh}u\cos u)du$$

$$=\frac{1}{4}[e^u(\sin u-\cos u)+e^{-u}(-\sin u-\cos u)$$
$$-e^u(\cos u+\sin u)+e^{-u}(-\cos u+\sin u)]\big|_0^t$$
$$=1-\operatorname{sh}t\cos t.$$

例 8 解 $y''+4y'+8y=\sin x, y(0)=1, y'(0)=0.$

解 $\mathscr{L}[y''+4y'+8y]=(s^2+4s+8)Y(s)$,

$$\mathscr{L}[h(x)]=\frac{1}{s^2+1},\quad C_0=1, C_1=0.$$

故
$$Y(s)=\frac{s+4}{s^2+4s+8}+\frac{1}{(s^2+1)(s^2+4s+8)}.$$

所以 $y(t)=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s+4}{s^2+4s+8}+\frac{1}{(s^2+1)(s^2+4s+8)}\right]$

$$=(e^{-2x}\cos 2x+e^{-2x}\sin 2x)$$
$$+\left(-\frac{4}{65}\cos x+\frac{7}{65}\sin x+\frac{4}{65}e^{-2x}\cos 2x+\frac{1}{130}e^{-2x}\sin 2x\right)$$
$$=e^{-2x}\left(\frac{69}{65}\cos 2x+\frac{131}{130}\sin 2x\right)+\frac{7}{65}\sin x-\frac{4}{65}\cos x.$$

第七节 二阶常系数线性方程与振动现象

主要内容

描述弹簧振动的方程

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+\mu\frac{dx}{dt}+cx=f(t),$$

若 $f(t)\equiv 0$，即没有外力，方程

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+\mu\frac{dx}{dt}+cx=0,$$

则称弹簧的振动为**阻尼自由振动**.

若 $f(t)\equiv 0$，且 $\mu=0$，既没有外力又忽略阻力，方程

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+cx=0,$$

则称弹簧的振动为**无阻尼自由振动或简谐振动**.

(1) 简谐振动. 方程改写为

$$\frac{d^2x}{dt^2}+k^2x=0, \qquad ①$$

通解为

$$x=C_1\cos kt+C_2\sin kt. \qquad ①'$$

(2) 阻尼自由振动. 方程改写为

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2n\frac{dx}{dt}+k^2x=0. \qquad ②$$

因为对应齐次方程的特征方程 $\lambda^2+2n\lambda+k^2=0$ 有特征根 $\lambda_{1,2}=-n\pm\sqrt{n^2-k^2}$,故

(i) $n^2-k^2<0$,方程②的通解为

$$x=Ae^{-nt}\sin(k_1t+\alpha). \qquad ②'$$

若 $x(0)=x_0$, $v(0)=v_0$,则

$$A=\frac{\sqrt{k_1^2x_0^2+(v_0+nx_0)^2}}{k_1} \quad (k_1=k^2-n^2).$$

(ii) $n^2-k^2=0$,方程②的通解为

$$x=e^{-nt}(C_1+C_2t). \qquad ②''$$

(iii) $n^2-k^2>0$,方程②的通解为

$$x=C_1e^{-(n+h)t}+C_2e^{-(n-h)t}, \qquad ②'''$$

其中 $h=n^2-k^2$.

(3) 阻尼强迫振动. 外力 $f(t)=q\sin pt$. 方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2n\frac{dx}{dt}+k^2x=q\sin pt, \qquad ③$$

方程③在 $n^2-k^2<0$ 时,有通解

$$x=Ae^{-nt}(\sin k_1t+\alpha)+B\sin(pt-\delta), \qquad ③'$$

其中 $k_1=k^2-n^2$, $\delta=\arctan\frac{2np}{k^2-p^2}$, $\alpha=\arctan\frac{k_1x_0}{v_0+nx_0}$.

疑难解析

为什么要讨论振动现象？

答 讨论振动现象主要是为了了解二阶常系数线性微分方程的应用及研究其解的物理意义.

二阶常系数线性微分方程的不同表现形式反映了不同的振动形式，因而得出不同的解，具有不同的物理意义. 振动系统与电学系统之间的相似性，使得它们在各自求解过程中的数学运算结果完全一致，因此对振动系统的计算结果可以照搬到电学系统上去.

在研究二阶常系数线性微分方程应用的同时，讨论振动现象也有它自身的意义.

方法、技巧与典型例题分析

在求解振动系统与电学系统的实际问题时，读者应该对力学与电学的基础知识与基本定理有所了解，正确建立微分方程，然后使用适当的方法求出方程的解，解决具体问题.

例1 一拉紧弹簧所受到的拉力与它的长度伸长成正比，当弹簧受到1 kg 拉力时，其长度增长1 cm. 今有重2 kg 的物体挂在弹簧下端，保持平衡. 假若将它稍向下拉，然后再放开，试求由此所产生振动的周期.

解 产生的振动是一简谐振动，振动的周期为$T=2\pi\sqrt{\bar{\lambda}/g}$，其中，$\bar{\lambda}$是弹簧的静止伸长，$g$是重力加速度. 依题设条件，得$\bar{\lambda}=2$ cm，故

$$T=2\pi\sqrt{2/g}.$$

例2 一重为$p=4$ kg 的物体挂在弹簧下端，它使弹簧的长度增长1 cm. 假定弹簧的上端有一转动机产生铅直调合振动$y=2\sin 30t$(cm)，并在初始时刻$t=0$时，重物处于静止状态，试求该重

物的运动规律.

解 取竖直线为x轴,正向向下. 设$x(t)$表示时刻t物体的位移,则依牛顿第二定律,有

$$m\ddot{x}=F,$$

其中m是物体质量,F是所受各个力的合力. 弹性力为$2k\sin 30t$,指向向下;弹簧恢复力为$-kx$,所以,有微分方程

$$m\ddot{x}+kx=2k\sin 30t. \qquad ①$$

由题设知,$m=\frac{4000}{g}$,$k=4000$. 式①化为

$$\frac{4000}{g}\ddot{x}+4000x=8000\sin 30t \Rightarrow \ddot{x}+gx=2\sin 30t. \qquad ②$$

其对应齐次方程的通解为

$$x=C_1\cos\sqrt{g}\,t+C_2\sin\sqrt{g}\,t.$$

因为$\pm 30\mathrm{i}$不是特征根,所以式②具有形如$x_1=A\cos 30t+B\sin 30t$的特解. 代入方程②,解得$A=0$,$B=\frac{2g}{g-900}$. 故式②的通解为

$$x=C_1\cos\sqrt{g}\,t+C_2\sin\sqrt{g}\,t+\frac{2g}{g-900}\sin 30t.$$

代入初始条件$x(0)=\dot{x}(0)=0$,得$C_1=0$,$C_2=\frac{-60\sqrt{g}}{g-900}$,所以,所求运动规律为

$$x(t)=\frac{2g\sin 30t-60\sqrt{g}\sin\sqrt{g}\,t}{g-900}.$$

例3 一质量为m的质点由静止开始沉入液体中,当下沉时,液体的反作用力与下沉的速度成正比,求此质点的运动规律.

解 设比例系数为k,下沉方向为正向,在时刻t下沉的位移为$x(t)$,则依牛顿第二定律,建立方程

$$m\ddot{x}=mg-k\dot{x}, \quad x(0)=\dot{x}(0)=0,$$

其对应齐次方程的特征方程$\lambda^2+\frac{k}{m}\lambda=0$,特征根$\lambda_1=0$,$\lambda_2=-\frac{k}{m}$,

故齐次方程通解为

$$x=C_1+C_2e^{-kt/m}.$$

因为0是特征根，所以原方程有形如$x_1=At$的特解. 代入原方程，解得$A=\frac{mg}{k}$. 故原方程通解为

$$x=C_1+C_2e^{-kt/m}+\frac{mg}{k}t.$$

代入初始条件$x(0)=\dot{x}(0)=0$，解得$C_1=-\frac{m^2g}{k^2}$，$C_2=\frac{m^2g}{k^2}$. 所以，质点的运动规律为

$$x(t)=\frac{mg}{k}t-\frac{m^2g}{k^2}(1-e^{-kt/m}).$$

例4 一链条悬挂在一钉子上，起动时一端离开钉子8 m，另一端离开钉子12 m，分别在以下两种情况下求链条滑下来所需要的时间：

(1) 若不计钉子对链条所产生的摩擦力；

(2) 若摩擦力为1 m长链的重量.

解 (1) 设在时刻t时，链条上较长一段垂下长度为$x(t)$. 设链条密度为ρ，则拉动链条下滑的作用力为

$$ma=F=x\rho g-(20-x)\rho g=2\rho g(x-10),$$

得微分方程

$$x''-\frac{g}{10}x=-g. \qquad ①$$

由特征方程$\lambda^2-\frac{g}{10}=0$得，特征根$\lambda_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{g}{10}}$. 故方程①的对应齐次方程通解为

$$x=C_1e^{-\sqrt{g/10}t}+C_2e^{\sqrt{g/10}t}.$$

设方程①的特解$y_1=A$，代入方程①解得$A=10$. 所以，方程①的通解为

$$x=C_1e^{-\sqrt{g/10}t}+C_2e^{\sqrt{g/10}t}.$$

代入$x(0)=12,\dot{x}(0)=0$，解得$C_1=1,C_2=1$，所以

$$x=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{-\sqrt{g/10}t}+\mathrm{e}^{\sqrt{g/10}t})+10,$$

即
$$\cosh(\sqrt{g/10}t)=\frac{x}{2}-5,$$

故$t=\sqrt{\frac{10}{g}}\operatorname{arcosh}\left(\frac{x}{2}-5\right)=\sqrt{\frac{10}{g}}\ln\left[\frac{x}{2}-5+\sqrt{\left(\frac{x}{2}-5\right)^2-1}\right]$.

当$x=20$，即链条完全下滑时，有

$$t=\sqrt{\frac{10}{g}}\ln(5-2\sqrt{6}).$$

(2) 因为

$$ma=F=x\rho g-(20-x)\rho g-1\rho g,$$

所以，微分方程为

$$x''-\frac{g}{10}x=-1.05g. \qquad ②$$

与题(1)类似，求得式②通解为

$$x=C_1\mathrm{e}^{-\sqrt{g/10}t}+C_2\mathrm{e}^{\sqrt{g/10}t}+10.5.$$

且可解得$C_1=C_2=3/4$，即

$$x=\frac{3}{4}(\mathrm{e}^{-\sqrt{g/10}t}+\mathrm{e}^{\sqrt{g/10}t})+10.5,$$

所以
$$\cosh\sqrt{\frac{g}{10}}t=\frac{2x}{3}-7.$$

故$t=\sqrt{\frac{10}{g}}\operatorname{arcosh}\left(\frac{2x}{3}-7\right)=\sqrt{\frac{10}{g}}\ln\left[\frac{2}{3}x-7+\sqrt{\left(\frac{2}{3}x-7\right)^2-1}\right]$.

当$x=20$，即链条完全滑下时，有

$$t=\sqrt{\frac{10}{g}}\ln\left(\frac{19}{3}+\frac{4}{3}\sqrt{22}\right).$$

例5 在LC电路中(图3.2)，先将开关拨到"1"处，对电容器充电到电源电压U_0，然后再将开关拨到"2"处，如果$C=2\times10^{-9}\mathrm{F}$，$L$

$=5\times10^{-4}\,\mathrm{H}$,求此 LC 电路中的电流 $i(t)$ 和电容器两端的电压 $U_C(t)$.

解 由基尔霍夫(Kirchhoff)定律,得到关于电流 i 的方程为

$$L\frac{\mathrm{d}^2i}{\mathrm{d}t^2}+\frac{1}{C}i=0,$$

$$i(0)=0,\quad i'(0)=\frac{U_0}{L}.$$

图 3.2



解此常系数线性齐次方程,得特解为

$$i(t)=U_0\sqrt{\frac{C}{L}}\sin\frac{1}{\sqrt{LC}}t.$$

代入 $C=2\times10^{-9}\,\mathrm{F}$,$L=5\times10^{-4}\,\mathrm{H}$,得电流为

$$i(t)=\frac{U_0}{5\times10^2}\sin10^6t.$$

再次由基尔霍夫定律,得到关于电压 U_C 的方程是

$$LC\frac{\mathrm{d}^2U_C}{\mathrm{d}t^2}+U_C=0,\quad U_C(0)=U'_C(0)=0.$$

解此常系数线性齐次方程,得特解为

$$U_C(t)=U_0\cos\frac{t}{\sqrt{LC}}=U_0\cos10^6t.$$

例6 有一 LRC 电路,其中 LC 并联,再与 R 及电源 $E=U\sin\omega t$ 串联,试求:(1) 通过电阻 R 的电流强度;(2) 在角频率等于何值时,电流强度最大或最小.

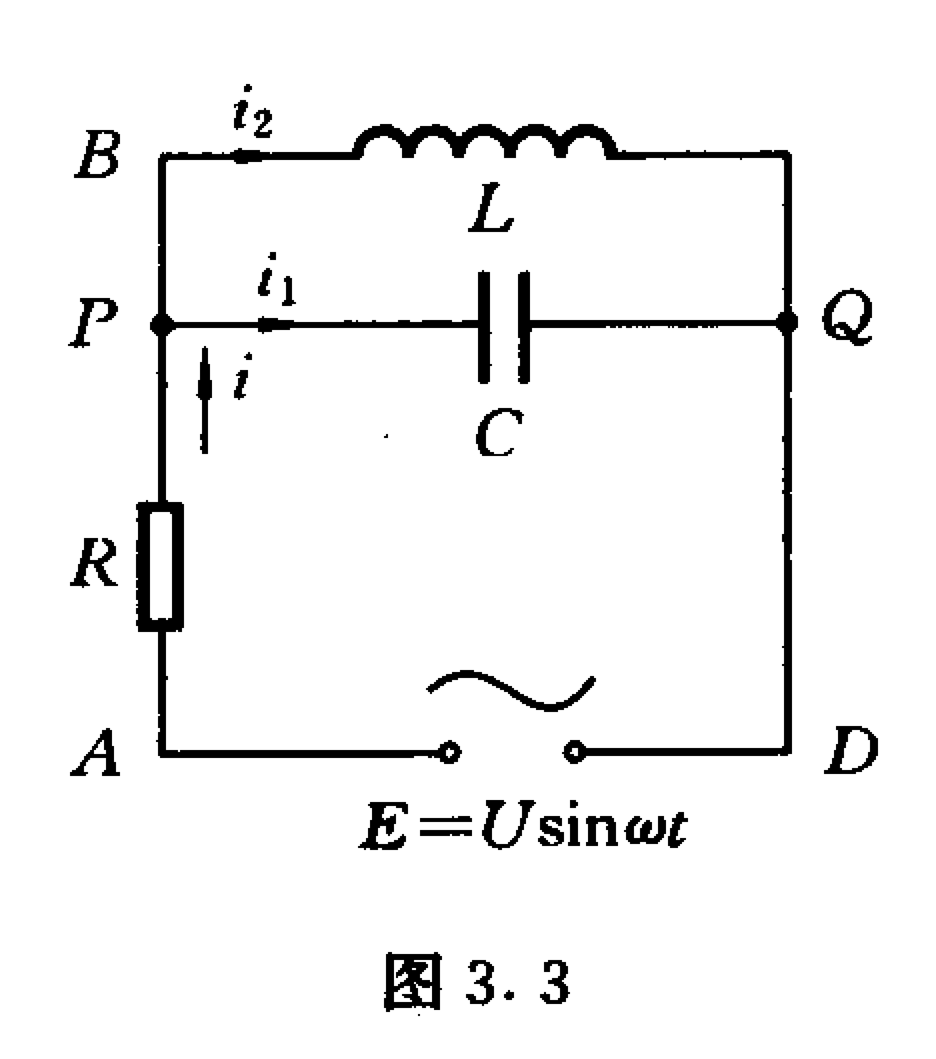


图 3.3

解 电路如图 3.3 所示. 电压极性与电流方向按图 3.3 中所示方向标定. 考察结点 P 的电流及回路 $ABQDA$ 与 $APQDA$ 的电压,根据基尔霍夫定律,得

$$\begin{cases} i=i_1+i_2, & ① \\ iR+L\dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}=U\sin\omega t, & ② \\ \dfrac{1}{C}\displaystyle\int i_1\mathrm{d}t+iR=U\sin\omega t. & ③ \end{cases}$$

微分式①，得

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}. \quad ④$$

由式②与式③解得

$$\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{L}(U\sin\omega t-iR),\quad \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}=-CU\omega^2\sin\omega t-CR\frac{\mathrm{d}^2i}{\mathrm{d}t^2}.$$

代入式④，得二阶常系数线性非齐次方程

$$\frac{\mathrm{d}^2i}{\mathrm{d}t^2}+\frac{1}{CR}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{CL}i=\frac{U}{R}\left(\frac{1}{LC}-\omega^2\right)\sin\omega t, \quad ⑤$$

其对应齐次方程的特征方程 $\lambda^2+\frac{1}{CR}\lambda+\frac{1}{CL}=0$ 有特征根 $\lambda_{1,2}=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{CR}\pm\sqrt{\left(\frac{1}{CR}\right)^2-\frac{4}{CL}}\right]$，其特征根或为负实数或为具有负实部的虚数，故其通解描述暂态过程，即其作用随时间推移，将很快消失.

方程⑤有形如 $i_1=A\cos\omega t+B\sin\omega t$ 的特解，代入方程⑤，解得

$$A=-\frac{\dfrac{U\omega}{CR^2}\left(\dfrac{1}{CL}-\omega^2\right)}{\left(\dfrac{1}{CL}-\omega^2\right)^2+\left(\dfrac{\omega}{CR}\right)^2},\quad B=\frac{\dfrac{U}{R}\left(\dfrac{1}{CL}-\omega^2\right)^2}{\left(\dfrac{1}{CL}-\omega^2\right)^2+\left(\dfrac{\omega}{CR}\right)^2}.$$

故 $$i=\frac{\dfrac{U}{R}\left(\dfrac{1}{CL}-\omega^2\right)}{\left(\dfrac{1}{CL}-\omega^2\right)^2+\left(\dfrac{\omega}{CR}\right)^2}\left[-\frac{\omega}{CR}\cos\omega t+\left(\frac{1}{CL}-\omega^2\right)^2\sin\omega t\right].$$

当 $\omega=0$ 或 $\omega=\infty$ 时，振幅 $\dfrac{\dfrac{U}{R}\left(\dfrac{1}{CL}-\omega^2\right)}{\sqrt{\left(\dfrac{1}{CL}-\omega^2\right)^2+\left(\dfrac{\omega}{CR}\right)^2}}$ 取极大值 $\dfrac{U}{R}$；

当$\omega=\sqrt{\frac{1}{LC}}$时，振幅取极小值0.

例7 有一LRC电路，其中RC并联，再与L及直流电源E串联，试求通过电感L的电流$i(t)$，假定在$t=0$时，$i=0$.

解 电路如图3.4所示，电流方向按回路中所示方向标定. 考虑回路$ELCE$与CRC的电压，依据基尔霍夫电压定律，得

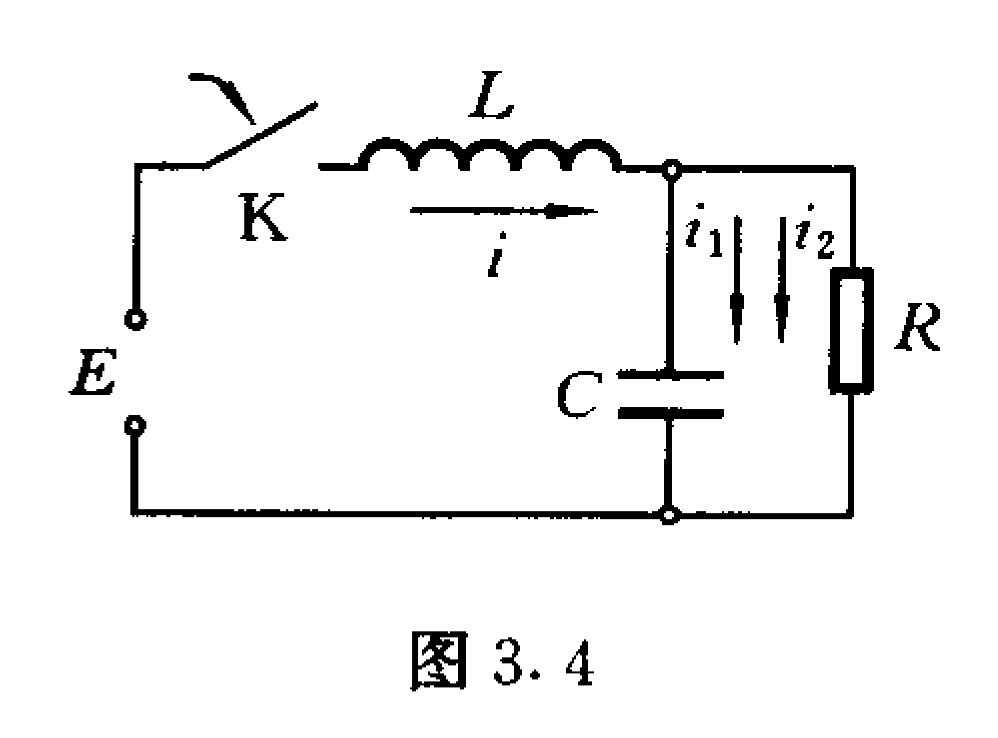


图3.4

$$\begin{cases} L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{C}\int_0^t(i-i_1)\mathrm{d}\tau=E, & ① \\ Ri_1-\frac{1}{C}\int_0^t(i-i_1)\mathrm{d}\tau=0. & ② \end{cases}$$

将式①与式②相加，得一阶常系数线性微分方程

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+Ri_1=E. \quad ③$$

微分式①，得

$$L\frac{\mathrm{d}^2i}{\mathrm{d}t^2}+\frac{1}{C}i-\frac{1}{C}i_1=0 \Rightarrow i_1=CL\frac{\mathrm{d}^2i}{\mathrm{d}t^2}+i.$$

代入式③，得二阶常系数线性微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2i}{\mathrm{d}t^2}+\frac{1}{CR}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{CL}i=\frac{E}{CLR}. \quad ④$$

式④对应齐次方程为$\lambda^2+\frac{1}{CR}\lambda+\frac{1}{CL}=0$，其特征根$\lambda_{1,2}=\alpha\pm\beta\mathrm{i}=\frac{1}{2CR}\pm\sqrt{\left(\frac{1}{2CR}\right)^2-\frac{1}{CL}}$.

(1) 当$\alpha^2>\frac{1}{CL}$时，对应齐次方程通解为

$$i=\mathrm{e}^{-\alpha t}(C_1\cosh\beta t+C_2\sinh\beta t).$$

因为数0不是特征根，所以式④有形如$i_1=A$的特解. 代入原方程④，解得$i_1=E/R$，故方程④的通解为

$$i=\frac{E}{R}+\mathrm{e}^{-\alpha t}(C_1\cosh\beta t+C_2\sinh\beta t). \qquad ⑤$$

代入初始条件 $i(0)=0, i'(0)=\frac{E}{L}$，得 $C_1=-\frac{E}{R}, C_2=\frac{E}{R\beta}\left(\frac{R}{L}-\alpha\right)$，从而

$$i=\frac{E}{R}\left\{1-\mathrm{e}^{-\alpha t}\left[\cosh\beta t+\left(\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\alpha}{L\beta}\right)\sinh\beta t\right]\right\}.$$

(2) 当 $\alpha^2<\frac{1}{CL}$ 时，类似可得

$$i=\frac{E}{R}\left\{1-\mathrm{e}^{-\alpha t}\left[\cos\omega t+\left(\frac{\alpha}{\omega}-\frac{R}{L\omega}\right)\sin\omega t\right]\right\},$$

其中
$$\omega=\sqrt{\frac{1}{LC}-\alpha^2}.$$

例8 有一电路如图3.5所示，已知 $E=20$ V，$C=0.5\times10^{-6}$ F，$L=0.1$ H，$R=2000\ \Omega$. 若先将开关拨向 A，达到稳定状态后再将开关拨向 B，求电压 $U_C(t)$ 及电流 $i(t)$.

解 由基尔霍夫定律，得

$$E-L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}-\frac{q}{C}-Ri=0.$$

因为 $q=U_CC, i=\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=U_C'C, \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=U_C''C$，所以有

$$U_C''+\frac{R}{L}U_C'+\frac{1}{LC}U_C=0. \qquad ①$$

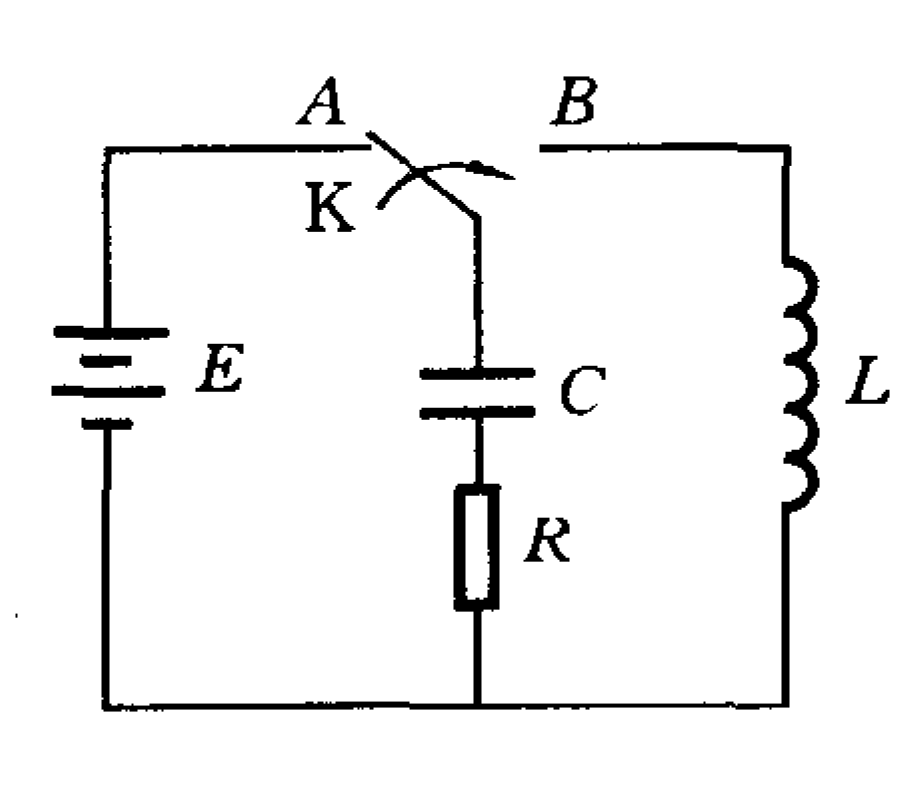


图 3.5

由于 $\frac{R}{L}=2\times10^4, \frac{1}{LC}=0.2\times10^8$，故式①化为

$$U_C''+2\times10^4U'_C+0.2\times10^8U_C=0. \qquad ②$$

式②的特征方程的特征根 $\lambda_1=-1.9\times10^4, \lambda_2=-10^3$，所以式②的通解

$$U_C=(C_1\mathrm{e}^{-1.9\times10^4t}+C_2\mathrm{e}^{-10^3t})\ \mathrm{V}.$$

代入初始条件 $U_C(0)=E=20$ V，$U_C'(0)=0$，解得 $C_1=-\frac{10}{9}, C_2=$

$\frac{190}{9}$. 于是

$$U_C=\frac{10}{9}(19e^{-10^3t}-e^{-1.9\times10^4t})\ \mathrm{V},$$

$$i=\frac{19}{18}\times10^{-2}(e^{-1.9\times10^4t}-e^{-10^3t})\ \mathrm{A}.$$

例 9 一单位质量的质点在数轴上运动，开始时质点在原点 O 处，且速度为 v_0. 在运动过程中，它受到一个力的作用，这个力的大小与质点到原点的距离成正比（比例系数 $k_1>0$），而方向与初速一致. 又介质的阻力与速度成正比（比例系数 $k_2>0$）. 求反映这质点的运动规律的函数.

解 设数轴为 x 轴，由牛顿第二定律

$$ma=F=k_1x-k_2x',$$

即得 $$x''+k_2x'-k_1x=0,\quad x(0)=0,\quad x'(0)=v_0. \qquad ①$$

其特征方程的特征根 $\lambda_{1,2}=\frac{1}{2}(-k_2\pm\sqrt{k_2^2+4k_1})$，故方程①的通解为

$$x=C_1e^{(-k_2-\sqrt{k_2^2+4k_1})t/2}+C_2e^{(-k_2+\sqrt{k_2^2+4k_1})t/2}.$$

代入 $x(0)=0,x'(0)=v_0$，解得

$$C_1=\frac{-v_0}{\sqrt{k_2^2+4k_1}},\quad C_2=\frac{v_0}{\sqrt{k_2^2+4k_1}}.$$

所以，质点的运动规律为

$$x(t)=\frac{v_0}{\sqrt{k_2^2+4k_1}}\left[e^{(-k_2+\sqrt{k_2^2+4k_1})t/2}-e^{(-k_2-\sqrt{k_2^2+4k_1})t/2}\right].$$

例 10 设有圆柱形浮筒，直径为 0.5 m，竖直放在水中，当稍向下压后突然放开，浮筒在水中上下振动的周期为 2 s，求浮筒的质量.

解 设水的密度为 ρ，S 为浮筒横截面面积，D 为浮筒的直径. 又设压下的位移为 x，则由牛顿第二定律，有

$$F=-\rho gSx, \quad F=ma=m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2},$$

由此得微分方程

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\rho gSx=0. \qquad ①$$

式①特征方程的特征根为 $\lambda_{1,2}=\pm\sqrt{\rho gS/m}\mathrm{i}$，所以，方程的通解为

$$x=C_1\cos\sqrt{\frac{\rho gS}{m}}t+C_2\sin\sqrt{\frac{\rho gS}{m}}t=A\sin\left(\sqrt{\frac{\rho gS}{m}}t+\varphi\right).$$

从而知浮筒振动的频率 $\omega=\sqrt{\frac{\rho gS}{m}}$.

因为周期 $T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{m}{\rho gS}}$，所以

$$T=2=2\pi\sqrt{\frac{m}{\rho gS}} \Rightarrow m=\frac{\rho gS}{\pi^2}.$$

代入 $\rho=1000\ \mathrm{kg/m^3}$，$g=9.8\ \mathrm{m/s^3}$，$D=0.5\ \mathrm{m}$，得

$$m=\frac{\rho gs}{\pi^2}=\frac{\rho gD^2}{4\pi}=195\ \mathrm{kg}.$$

例11 大炮以仰角 α，初速 v_0 发射炮弹. 若不计空气阻力，求弹道曲线.

解 建立坐标系如下：以炮口为原点，炮弹前进的水平方向为 x 轴，y 轴竖直向上，则弹道运动的微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=g, \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=0.$$

$$y(0)=0, \ y'(0)=v_0\sin\alpha; \quad x(0)=0, \ x'(0)=v_0\cos\alpha.$$

用逐次积分法求得通解，再代入初始条件，即得参数形式特解

$$\begin{cases} x=(v_0\cos\alpha)t, \\ y=(v_0\sin\alpha)t-\frac{1}{2}gt^2. \end{cases}$$

第八节　幂级数解法大意

主要内容

二阶线性方程

$$p_0(x)y''+p_1(x)y'+p_2(x)y=0, \tag{①}$$

当它的系数 $p_0(x),p_1(x),p_2(x)$ 不为常数时，它的解往往不能用"有限形式"表出. 幂级数解法可以求解这类方程，还可以引出很多新的超越函数.

1. **定理3.12**　如果 $p_0(x),p_1(x),p_2(x)$ 在某点 x_0 的邻域内解析，即它们可展开成 $(x-x_0)$ 的幂级数，且 $p_0(x_0)\neq 0$，则方程①的解在 x_0 的邻域内也能展开成为 $(x-x_0)$ 的幂级数

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n. \tag{②}$$

2. **定理3.13**　如果 $p_0(x),p_1(x),p_2(x)$ 在 x_0 的邻域内解析，而 x_0 为 $p_0(x)$ 的 s 重零点，是 $p_1(x)$ 的不低于 $s-1$ 重的零点(若 $s>1$)，是 $p_2(x)$ 的不低于 $s-2$ 重的零点(若 $s>2$)，则方程至少有一个形如

$$y=(x-x_0)^r\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n \tag{②'}$$

的广义幂级数解，其中 r 是某一实数.

3. 形如

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+(x^2-n^2)y=0\quad(n\geqslant 0) \tag{③}$$

或

$$x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)+(x^2-n^2)y=0 \tag{④}$$

的微分方程，称为 n 阶**贝塞尔**(Bessel)**方程**，它的解称为**贝塞尔**

函数.

当n不是整数时,式③通解为

$$y=C_1J_n(x)+C_2J_{-n}(x), \tag{5}$$

当n是整数时,式③通解为

$$y=C_1J_n(x)+C_2Y_n(x), \tag{6}$$

其中C_1,C_2为任意常数,$J_n(x),J_{-n}(x)$称为n阶**第一类贝塞尔函数**,$Y_n(x)$称为**第二类贝塞尔函数**.

$$J_n(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}}{k!\ \Gamma(k+n+1)}, \tag{7}$$

$$J_{-n}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n}}{k!\ \Gamma(k-n+1)}, \tag{8}$$

$$Y_n(x)=\frac{2}{\pi}\left(\ln\frac{x}{2}+v\right)J_n(x)-\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n}$$
$$-\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\ (n+k)!}[\varphi(k)+\varphi(n-k)]\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}. \tag{9}$$

当n是整数时,有$J_{-n}(x)=(-1)^nJ_n(x)$.

一般地,若一实际问题被归结为贝塞尔函数,即认为已经解出(因为结果有表可查).

4. 形如

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-2x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+n(n+1)y=0 \tag{10}$$

或

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]+n(n+1)y=0 \tag{11}$$

的微分方程,称为**勒让德**(Legendre)**方程**. 它的解称为**勒让德函数**. 当$n=0,1,2,\cdots$时,式⑩的通解为

$$y=C_1P_n(x)+C_2Q_n(x), \tag{12}$$

其中C_1,C_2为任意常数,$P_n(x)$称为第一类勒让德函数,$Q_n(x)$称为第二类勒让德函数.

疑难解析

怎样使用定理3.12求解方程①?

答 使用定理3.12求解方程①的方法称为方程的幂级数解法,其实施步骤如下:

(1) 考察$p_0(x)$,$p_1(x)$,$p_2(x)$是否满足定理3.12条件;

(2) 将$p_0(x)$,$p_1(x)$,$p_2(x)$展开成$(x-x_0)$的幂级数,根据$p_0(x_0)\neq 0$或$p_0(x_0)=0$确定解的形式是式②还是式②′;

(3) 若$p_0(x_0)\neq 0$,则将式②(需形式上微分式②)代入方程①,比较等式两端x同次幂系数,建立关于系数a_k的方程;

(4) 解出a_k,再解式②,并求出式②的收敛区间;

(5) 若$p_0(x_0)=0$,则将式②′代入方程①. 其余过程与步骤(3)、(4)一样.

方法、技巧与典型例题分析

用幂级数解法求解二阶线性方程(事实上也适用高阶线性方程),解题过程比较复杂,一定要细心认真. 对于一些特殊的方程,如贝塞耳方程、勒让德方程、厄米特(Hermite)方程可以通过查表来取得结果.

例1 用幂级数解法求解下列方程:

(1) $y''+xy'+y=0$; (2) $y''+x^2y'=0$.

解 (1) 因为$p_0(x)=1$,$p_1(x)=x$,$p_2(x)=1$,所以在$x_0=0$的邻域内有形如$y_0=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的幂级数解. 将$y_0$,$y_0'$,$y_0''$代入原方程,得

$$(2a_2+a_0)+\sum_{n=3}^{\infty}[n(n-1)a_n+(n-1)a_{n-2}]x^{n-2}=0.$$

比较 x 的同次幂的系数，得

$$2a_2+a_0=0,\quad 6a_3+2a_1=0,$$
$$n(n-1)a_n+(n-1)a_{n-2}=0\quad (n\geqslant 4).$$

解得 $\qquad a_2=-\frac{a_0}{2},\quad a_3=-\frac{a_1}{3},\quad a_{2n}=(-1)^n\frac{1}{2^n n!}a_0,$

$$a_{2n+1}=\frac{(-1)^n a_1}{1\cdot 3\cdot \cdots \cdot (2n+1)}.$$

所以，原方程的通解为

$$y=a_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(-\frac{x^2}{2}\right)^n+a_1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1\cdot 3\cdot \cdots \cdot (2n+1)}x^{2n+1},$$

即 $\qquad y=a_0\mathrm{e}^{-x^2/2}+a_1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1\cdot 3\cdot \cdots \cdot (2n+1)}x^{2n+1}.$

(2) 因为 $p_0(x)=1, p_1(x)=x^2, p_2(x)=0$，所以在 $x_0=0$ 的邻域内有形如 $y_0=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的幂级数解，将 y_0, y_0', y_0'' 代入原方程，得

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}+x^2\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}=0,$$

即 $\qquad 2a_2+6a_3x+\sum_{n=4}^{\infty}[n(n-1)a_n+(n-3)a_{n-3}]x^{n-2}=0.$

比较 x 的同次幂的系数，得

$$2a_2=0,\ 2\cdot 3a_3=0,\ a_4=-\frac{1}{4\cdot 3}a_1,\cdots,\ a_n=-\frac{n-3}{n(n-1)}a_{n-3},$$

$$a_{3n+1}=\frac{(-1)^n 1\cdot 4\cdot 7\cdot \cdots \cdot (3n-2)}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot \cdots \cdot 3n(3n+1)}a_1,$$

$$a_{3n-1}=0,\quad a_{3n}=0\quad (n\geqslant 1).$$

所以，原方程通解为

$$y=a_0+a_1\left[x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot \cdots \cdot (3n-2)}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot \cdots \cdot 3n(3n+1)}x^{3n+1}\right].$$

例 2 用幂级数解法求解下列方程：

(1) $2xy''+(1-2x)y'-y=0$； $\qquad$ (2) $y''+\frac{1}{2x}y'+\frac{1}{4x}y=0.$

解 （1）因为 $p_0(x)=2x, p_1(x)=1-2x, p_2(x)=-1$，所以，方程在 $x=0$ 的邻域内具有形如 $y_0=x^\rho\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的广义幂级数解．将 y_0, y_0', y_0'' 代入原方程，得

$$2\rho^2-\rho=0 \quad\Rightarrow\quad \rho=\frac{1}{2}, \quad \rho=0.$$

所以，有广义幂级数解

$$y_1=x^{1/2}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n, \quad y_2=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n.$$

（i）将 y_1, y_1', y_1'' 代入原方程，比较 x 的同次幂系数，得

$$a_1=\frac{2}{3}a_0,\ a_2=\frac{2}{5}a_1,\ \cdots,\ a_n=\frac{2}{2n+1}a_{n-1} \quad (n\geqslant 3),$$

故
$$a_n=\frac{2^na_0}{1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2n+1)} \quad (n\geqslant 1),$$

所以，原方程的一个解为

$$y_1=a_0x^{1/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2n+1)}x^n.$$

（ii）将 y_2, y_2', y_2'' 代入原方程，比较 x 的同次幂系数，得

$$b_1=b_0,\ b_2=\frac{1}{2}b_1,\ \cdots,\ b_n=\frac{1}{n}b_{n-1} \quad (n\geqslant 3),$$

故
$$b_n=\frac{1}{n!}b_0 \quad (n\geqslant 1).$$

所以，原方程的另一个解为

$$y_2=b_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}.$$

于是，原方程的通解为

$$y=a_0x^{1/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2n+1)}x^n+b_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},$$

即
$$y=a_0x^{1/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2n+1)}x^n+b_0\mathrm{e}^x.$$

（2）因为 $p_0(x)=1, p_1(x)=\frac{1}{2x}, p_2(x)=\frac{1}{4x}$，所以，方程在 $x=$

0 的邻域有形如 $y_0=x^\rho\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的广义幂级数解. 将 y_0, y_0', y_0'' 代入原方程,得

$$\rho(\rho-1)+\rho/2=0 \quad \Rightarrow \quad \rho_1=0, \quad \rho_2=1/2,$$

所以,有广义幂级数解

$$y_1=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n, \quad y_2=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^{n+1/2}.$$

(i) 将 y_1, y_1', y_1'' 代入原方程,比较 x 的同次幂系数,得

$$a_1=-\frac{1}{2}a_0, \quad a_2=-\frac{1}{4\cdot 3}a_1, \quad \cdots, \quad a_n=-\frac{1}{2n(2n-1)}a_{n-1}(n\geqslant 3),$$

故
$$a_n=(-1)^n\frac{1}{(2n)!}a_0 \quad (n\geqslant 1).$$

所以,原方程的一个解为

$$y_1=a_0\left[1-\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{4!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^n}{(2n)!}+\cdots\right].$$

(ii) 将 y_2, y_2', y_2'' 代入原方程,比较 x 的同次幂系数,得

$$b_1=-\frac{1}{6}b_0, \quad b_2=-\frac{1}{20}b_1, \quad \cdots, \quad b_n=-\frac{b_{n-1}}{(2n+1)2n} \quad (n\geqslant 3),$$

故
$$b_n=(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}b_0 \quad (n\geqslant 1).$$

所以,原方程的另一个解为

$$y_2=b_0x^{1/2}\left[1-\frac{x}{3!}+\frac{x^2}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^n}{(2n+1)!}+\cdots\right].$$

于是,原方程的通解为

$$y=a_0\left[1-\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{4!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^n}{(2n)!}+\cdots\right]$$
$$+b_0x^{1/2}\left[1-\frac{x}{3!}+\frac{x^2}{5!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^n}{(2n+1)!}+\cdots\right],$$

即
$$y=a_0\cos\sqrt{x}+b_0\sin\sqrt{x}.$$

例 3 求解勒让德方程:

$$(1-x^2)y''-2xy'+n(n+1)y=0 \quad (n \text{ 为常数}).$$

解 因为 $p_0(x)=1-x^2, p_1(x)=-2x, p_2(x)=n(n+1)$，所以可以在 $(-1,1)$ 内展开成幂级数，原方程有形如 $y_0=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的幂级数解.

将 y_0, y_0', y_0'' 代入原方程，得

$$(1-x^2)\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)a_kx^{k-2}-2x\sum_{k=1}^{\infty}ka_kx^{k-1}+(n+1)n\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k=0.$$

比较 x 的同次幂的系数，得

$$2a_2+n(n+1)a_0=0,\quad 3\times 2a_3+(n-1)(n+2)a_1=a,\cdots$$

$$(k+2)(k+1)a_{k+2}+(n-k)(n+k+1)a_k=0,\quad (k\geqslant 2).$$

故有递推公式

$$a_{k+2}=-\frac{(n-k)(n+k+1)}{(k+2)(k+1)}a_k\quad (k\geqslant 0).$$

令 $k=0,1,2,\cdots$，得

$$a_2=-\frac{n(n+1)}{2}a_0,$$

$$a_3=-\frac{(n-1)(n+2)}{3!}a_1,$$

$$a_4=-\frac{(n-2)(n+3)}{3\cdot 4}a_3=\frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!}a_0$$

$$a_5=-\frac{(n-3)(n+4)}{4\cdot 5}a_4=\frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!}a_1,$$

$$\vdots$$

于是，原方程的幂级数解为

$$\begin{aligned}y&=a_0y_1(x)+a_1y_2(x)\\&=a_0\left[1-\frac{n(n+1)}{2!}x^2+\frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!}x^4+\cdots\right]\\&\quad+a_1\left[x-\frac{(n-1)(n-2)}{3!}x^3+\frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!}x^5+\cdots\right].\end{aligned}$$

例 4 用幂级数方法求解下列方程：

(1) $xy''-(x+m)y'+my=0$ （m 为自然数）；

(2) $(x+1)y'=x^2+2x+y$.

解 (1) 因为 $p_0(x)=x, p_1(x)=-(x+m), p_2(x)=m$，所以，方程有形如 $y_1=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的幂级数解. 将 y_1, y_1', y_1'' 代入方程，比较 x 的同次幂系数，得

$$a_0=a_1, \quad a_n=\frac{a_{m+1}}{n(n-1)\cdots(m+2)} \quad (n\geqslant m+2),$$

$$a_n=\frac{1}{n!}a_1 \quad (n\leqslant m).$$

所以

$$\begin{aligned} y &= a_0+\sum_{n=1}^{m}\frac{a_0}{n!}x^n+a_{m+1}x^{m+1}+\sum_{n=m+2}^{\infty}\frac{a_{m+1}}{n(n-1)\cdots(m+2)}x^n \\ &=(m+1)!\ a_{m+1}e^x+[a_0-(m+1)!\ a_{m+1}]\sum_{n=0}^{m}\frac{x^n}{n!}, \end{aligned}$$

其中 a_{m+1}, a_0 为任意常数. 于是，原方程通解为

$$y=C_1e^x+C_2\sum_{n=0}^{m}\frac{x^n}{n!} \quad (C_1, C_2 \text{ 为任意常数}).$$

(2) 设方程有形如 $y_1=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的幂级数解，将 y, y' 代入原方程，比较 x 的同次幂的系数，得

$$a_1=a_0, \ a_2=-1, \ a_3=2/3, \ \cdots, \ a_n=(-1)^{n-3}\frac{4}{n(n-1)} \quad (n\geqslant 4).$$

所以，原方程通解为

$$y=a_0(1+x)-x^2+\frac{2}{3}x^3+\sum_{n=4}^{\infty}(-1)^{n-3}\frac{4}{n(n-1)}x^n.$$

例 5 用幂级数解法求下列方程满足初始条件的特解：

(1) $y'=y^2+x^2, y(0)=1/2$;

(2) $y''-xy=0, y(0)=0, y'(0)=1$.

解 (1) 由初始条件知，方程解的形式为 $y=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$. 将 y, y' 代入方程，得

$$a_1+\sum_{n=2}^{\infty}na_nx^{n-1}=x^3+\left(\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n\right)^2.$$

比较 x 的同次幂的系数，经推导后得

$$a_1=\frac{1}{4},\quad a_2=\frac{1}{8},\quad a_3=\frac{1}{16},\quad a_4=\frac{9}{32},\quad \cdots,$$

故所求特解为

$$y=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}x+\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3+\frac{9}{32}x^4+\cdots.$$

(2) 由 $p_0(x)=1,p_1(x)=0,p_2(x)=-x$ 知，方程有形如 $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的特解. 由 $y(0)=0$，得 $a_0=0$. 又由 y 得 $y'=\sum_{n=0}^{\infty}na_nx^{n-1}$，又因 $y'(0)=1$，得 $a_1=1$. 故

$$y=x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_nx^n+\cdots=x+\sum_{n=2}^{\infty}a_nx^n.$$

将 y,y',y'' 代入原方程，比较 x 的同次幂的系数，得

$$a_2=0,\ a_3=0,\ a_4=\frac{1}{4\times 3},\ a_5=0,\ a_6=0,\ \cdots$$

$$a_{n+2}=\frac{a_{n+1}}{(n+2)(n+1)}\quad(n=3,4,\cdots).$$

一般地，有
$$a_{3m-1}=a_{3m}=0,$$

$$a_{3m+1}=\frac{1}{(3m+1)3m\cdot\cdots\cdot 7\cdot 6\cdot 4\cdot 3}\quad(m=1,2,\cdots),$$

所以，原方程满足初始条件的特解为

$$y=x+\frac{x^4}{4\cdot 3}+\frac{x^7}{7\cdot 6\cdot 4\cdot 3}+\cdots+\frac{x^{3m+1}}{(3m+1)\cdot 3m\cdot\cdots\cdot 7\cdot 6\cdot 4\cdot 3}+\cdots.$$

例 6 用幂级数法求下列方程满足初始条件的特解：

(1) $(1-x)y'+y=1+x,y(0)=0$;

(2) $\frac{d^2x}{dt^2}+x\cos t=0,x(0)=x'(0)=0.$

解 (1) 设满足初始条件 $y(0)=0$ 的特解为 $y=\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$，代入

原方程后经整理得

$$a_1+\sum_{n=1}^{\infty}[(n-1)a_{n+1}+(1-n)a_n]x^n=1+x.$$

比较 x 同次幂的系数，得

$$a_1=1,\quad a_2=\frac{1}{2},$$

$$a_n=\frac{n-2}{n}a_{n-1}=\frac{n-2}{n}\frac{n-3}{n-1}a_{n-2}=\frac{n-2}{n}\frac{n-3}{n-1}\frac{n-4}{n-2}\cdots\frac{2}{4}\frac{1}{3}a_2$$

$$=\frac{1}{n(n-1)}\quad(n\geqslant 3),$$

故

$$y=x+\frac{1}{2}x^2+\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)}x^n$$

$$=x+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+2)(n+1)}x^{n+2}.$$

即满足初始条件的幂级数形式的特解.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+2)(n+1)}x^{n+2}=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x\left(\int_0^x x^n\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}x=\int_0^x\left[\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^x\left(\int_0^x\frac{1}{1-x}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}x=\int_0^x[-\ln(1-x)]\mathrm{d}x$$

$$=-\left[x\ln(1-x)-\int_0^x\frac{-x}{1-x}\mathrm{d}x\right]$$

$$=-x\ln(1-x)+x+\ln(1-x)$$

$$=x+(1-x)\ln(1-x).$$

所以，方程满足初始条件的特解为

$$y=2x+(1-x)\ln(1-x).$$

(2) 设满足初始条件 $x(0)=x'(0)=0$ 的特解为 $x=a+\sum_{n=2}^{\infty}a_nt^n$，则

$$x'=\sum_{n=2}^{\infty}na_nt^{n-1},\quad x''=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nt^{n-2},$$

$$\cos t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}t^{2n},$$

将上述三式代入原方程，得

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n t^{n-2}+\left(a+\sum_{n=2}^{\infty} a_n t^n\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}t^{2n}=0.$$

比较 x 同次幂的系数，得

$$a_0=a,\quad a_1=0,\quad a_2=-\frac{a}{2!},\quad a_3=0,\quad a_4=\frac{2}{4!}a,$$

$$a_5=0,\quad a_6=-\frac{9}{6!},\quad a_7=0,\quad a_8=\frac{55}{8!}a,\quad \cdots,$$

所以，方程满足初始条件的特解为

$$x=a\left(1-\frac{1}{2!}t^2+\frac{2}{4!}t^4-\frac{9}{6!}t^6+\frac{55}{8!}t^8-\cdots\right).$$

例7 求方程 $x^2y''+xy'+\left(4x^2-\frac{9}{25}\right)y=0$ 的通解.

解 作变换 $t=2x$，则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},\quad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)=4\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}.$$

代入原方程，得

$$t^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+t\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\left(t^2-\frac{9}{25}\right)y=0$$

是 $n=\frac{3}{5}$ 的贝塞尔方程，其通解为

$$y=C_1J_{3/5}(t)+C_2J_{-3/5}(t).$$

将 $t=2x$ 代回，得原方程通解为

$$y=C_1J_{3/5}(2x)+C_2J_{-3/5}(2x).$$

第四章　线性微分方程组

本章介绍一阶微分方程组的一些解法和基本理论．读者要注意学习与掌握解的存在与唯一性，解对参数的连续依赖性，通解的结构定理，常系数线性微分方程组通解的求法等内容．

第一节　一阶微分方程组　线性微分方程组的一般概念

主要内容

含有 n 个未知函数 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 的一阶方程组的一般形状为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x}=f_1(x,y_1,y_2,\cdots,y_n),\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x}=f_2(x,y_1,y_2,\cdots,y_n),\\ \qquad\vdots\\ \dfrac{\mathrm{d}y_n}{\mathrm{d}x}=f_n(x,y_1,y_2,\cdots,y_n).\end{cases}\tag{①}$$

若有一组函数 $y_1(x),y_2(x),\cdots,y_n(x)$，使得在 $[a,b]$ 上有恒等式

$$\frac{\mathrm{d}y_i(x)}{\mathrm{d}x}=f_i(x,y_1(x),y_2(x),\cdots,y_n(x))\quad(i=1,2,\cdots,n),$$

则这组函数是方程组①在 $[a,b]$ 上的**一个解**．

含有 n 个任意常数 $C_1,C_2,\cdots,C_n$ 的解

$$\begin{cases} y_1=\varphi_1(x,C_1,C_2,\cdots,C_n), \\ y_2=\varphi_2(x,C_1,C_2,\cdots,C_n), \\ \quad\vdots \\ y_n=\varphi_n(x,C_1,C_2,\cdots,C_n). \end{cases} \quad ②$$

称为式①的**通解**. 如果通解满足方程组

$$\begin{cases} \Phi_1(x;y_1,y_2,\cdots,y_n;C_1,C_2,\cdots,C_n)=0, \\ \Phi_2(x;y_1,y_2,\cdots,y_n;C_1,C_2,\cdots,C_n)=0, \\ \quad\vdots \\ \Phi_n(x;y_1,y_2,\cdots,y_n;C_1,C_2,\cdots,C_n)=0, \end{cases} \quad ③$$

则称式③为式①的**通积分**.

在求得式①的通解或通积分后,代入初始条件 $y_1(x_0)=y_{10}$, $y_2(x_0)=y_{20},\cdots,y_n(x_0)=y_{n0}$,就可以解出 $C_1,C_2,\cdots,C_n$,求得式①的满足初始条件的解.

1. 若令向量函数

$$\boldsymbol{Y}(x)=\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{F}(x,\boldsymbol{Y})=\begin{pmatrix} f_1(x,y_1,y_2,\cdots,y_n) \\ f_2(x,y_1,y_2,\cdots,y_n) \\ \vdots \qquad \vdots \\ f_n(x,y_1,y_2,\cdots,y_n) \end{pmatrix},$$

并定义

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Y}(x)}{\mathrm{d}x}=\begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x} \\ \frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x} \\ \vdots \\ \frac{\mathrm{d}y_n}{\mathrm{d}x} \end{pmatrix}, \quad \int_{x_0}^{x}\boldsymbol{F}(x)\mathrm{d}x=\begin{pmatrix} \int_{x_0}^{x}f_1(x)\mathrm{d}x \\ \int_{x_0}^{x}f_2(x)\mathrm{d}x \\ \vdots \\ \int_{x_0}^{x}f_n(x)\mathrm{d}x \end{pmatrix},$$

则式①有向量形式

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Y}}{\mathrm{d}x}=\boldsymbol{F}(x,Y) \quad ④$$

式①的初始条件记为

$$\boldsymbol{Y}(x_0)=\boldsymbol{Y}_0,\quad 其中\ \boldsymbol{Y}_0=\begin{pmatrix}y_{10}\\y_{20}\\\vdots\\y_{n0}\end{pmatrix}. \qquad ⑤$$

式①的初值问题记为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{Y}}{\mathrm{d}x}=\boldsymbol{F}(x,\boldsymbol{Y}),\\ \boldsymbol{Y}(x_0)=\boldsymbol{Y}_0.\end{cases} \qquad ⑥$$

2. n 维向量 $\boldsymbol{Y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}$ 的**范数** $\|\boldsymbol{Y}\|$ 定义为

$$\|\boldsymbol{Y}\|=\sum_{i=1}^{n}|y_i|,$$

具有以下性质：

(1) $\|\boldsymbol{Y}\|\geqslant 0$，且 $\|\boldsymbol{Y}\|=0$ 当且仅当 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{0}$(零向量)；

(2) $\|\boldsymbol{Y}_1+\boldsymbol{Y}_2\|\leqslant\|\boldsymbol{Y}_1\|+\|\boldsymbol{Y}_2\|$；

(3) 对任意常数 α，有 $\|\alpha\boldsymbol{Y}\|=|\alpha|\cdot\|\boldsymbol{Y}\|$；

(4) $\left\|\int_{x_0}^{x}\boldsymbol{F}(x)\mathrm{d}x\right\|\leqslant\left|\int_{x_0}^{x}\|\boldsymbol{F}(x)\|\mathrm{d}x\right|$.

3. 如果对于 $[a,b]$ 上的任意 x，有

$$\lim_{n\to+\infty}\|\boldsymbol{Y}_n(x)-\boldsymbol{Y}(x)\|=0,$$

则称 $\boldsymbol{Y}_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上**按范数收敛于** $\boldsymbol{Y}(x)$. 若上式对 $[a,b]$ 上的 x 是一致的，则称 $\boldsymbol{Y}_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上**按范数一致收敛于** $\boldsymbol{Y}(x)$.

4. 如果对 n 维向量函数 $\boldsymbol{F}(x)$ 有

$$\lim_{x\to x_0}\|\boldsymbol{F}(x)-\boldsymbol{F}(x_0)\|=0,$$

则称 $\boldsymbol{F}(x)$ **在** x_0 **连续**.

5. **定理 4.1** 如果函数 $F(x,\boldsymbol{Y})$ 在 $n+1$ 维空间的区域 R：$|x-x_0|\leqslant a$，$\|\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{Y}_0\|\leqslant b$ 上满足：(1) 连续；(2) 关于 $\boldsymbol{Y}$ 满足李普希兹条件，即存在 $N>0$，使对于 R 上任意两点 $(x,\boldsymbol{Y}_1)$，$(x,\boldsymbol{Y}_2)$，有

$$\| F(x,\boldsymbol{Y}_1)-F(x,\boldsymbol{Y}_2)\| \leqslant N \| \boldsymbol{Y}_1-\boldsymbol{Y}_2 \| ,\tag{7}$$

则存在$h_0>0, h_0=\min(a, b/M), M=\max\limits_{(x,Y)\in R}\| F(x,\boldsymbol{Y})\|$，使初值问题⑥的解在$|x-x_0|\leqslant h_0$上存在且唯一.

6. 若在方程组①中，函数$f_i(x, y_1, y_2, \cdots, y_n)(i=1,2,\cdots,n)$关于$y_1, y_2, \cdots, y_n$是线性的，即有

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x}=a_{11}(x)y_1+a_{12}(x)y_2+\cdots+a_{1n}(x)y_n+f_1(x),\\ \dfrac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x}=a_{21}(x)y_1+a_{22}(x)y_2+\cdots+a_{2n}(x)y_n+f_2(x),\\ \quad\vdots\\ \dfrac{\mathrm{d}y_n}{\mathrm{d}x}=a_{n1}(x)y_1+a_{n2}(x)y_2+\cdots+a_{nn}(x)y_n+f_n(x),\end{cases}\tag{8}$$

则称方程组⑧是线性微分方程组.

7. 假设方程组⑧的系数$a_{ij}(x)(i,j=1,2,\cdots,n)$及$f_i(x)(i=1,2,\cdots,n)$在某区间$I:[a,b]$上连续. 令

$$\boldsymbol{A}(x)=\begin{pmatrix}a_{11}(x) & a_{12}(x) & \cdots & a_{1n}(x)\\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \cdots & a_{2n}(x)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \cdots & a_{nn}(x)\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{F}(x)=\begin{pmatrix}f_1(x)\\ f_2(x)\\ \vdots\\ f_n(x)\end{pmatrix},$$

则方程组⑧有向量形式

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Y}}{\mathrm{d}x}=\boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{F}(x).\tag{9}$$

若所有$f_i(x)\equiv 0\ (i=1,2,\cdots,n)$，即$\boldsymbol{F}(x)\equiv\boldsymbol{0}$（零向量），则式⑨变为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Y}}{\mathrm{d}x}=\boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{Y}\tag{10}$$

称为**线性齐次方程组**. 式⑨称为**线性非齐次方程组**. 式⑩也称为式⑨的**对应的齐次方程组**.

8. **定理 4.1′** 如果$\boldsymbol{A}(x)$及$\boldsymbol{F}(x)$在$I:[a,b]$上连续，则对于$[a,b]$上的任一x_0以及任意给定的$\boldsymbol{Y}_0$，方程组⑧的满足初始条件⑤

的解在$[a,b]$上存在且唯一.

疑 难 解 析

1. 为什么要研究一阶线性微分方程组?

答 在常微分方程理论研究中,最有代表性的就是关于一阶线性微分方程组的,它比高阶线性微分方程式更为广泛,表现为以下几个方面.

(1) 任一高阶线性微分方程式均可化为与之等价的一阶线性微分方程组,且是一阶线性微分方程组的特殊情形. 例如,二阶线性微分方程

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=f(t),$$

令 $\dot{x}=y$,则 $\ddot{x}=\frac{dy}{dt}$,原方程化为一阶线性微分方程组

$$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=y,\\ \frac{dy}{dt}=-\frac{c}{m}y-\frac{k}{m}x+\frac{1}{m}f(t).\end{cases}$$

(2) 反之. 任意一个一阶线性微分方程组不一定能化成与之等价的高阶线性微分方程式. 例如,一阶线性方程组

$$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=-x+y+z,\\ \frac{dy}{dt}=x-y+z,\\ \frac{dz}{dt}=x+y-z\end{cases}$$

对第一个方程求导两次后,整理可得

$$\frac{d^3x}{dt^3}=-5x+3y+3z.$$

但要得到仅含 x 的三阶微分方程式却很困难. 因为要由$\frac{dx}{dt}$,$\frac{d^2x}{dt^2}$,

$\frac{d^3x}{dt^3}$的三个方程中解出 y 和 z,必须 $x=0$,但这是不能接受的.

(3) 仅当系数都连续的情形,线性方程组在系数可微的条件下,才能化为等价的高阶方程式.而高阶方程式化为等价的一阶线性方程组只要求系数连续,条件宽松得多. 例如,方程组

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx}=a(x)y_2, \\ \frac{dy_2}{dx}=b(x)y_1, \end{cases}$$

仅当 $a(x)$ 可微,才能化为关于 y_1 的二阶方程式

$$\frac{d^2y_1}{dx^2}-\frac{a'(x)}{a(x)}\frac{dy_1}{dx}-a(x)b(x)y_1=0.$$

关于 y_2 的二阶方程式类似可求.

2. 什么是求解线性微分方程组的消元法?

答 对于线性方程组

$$\frac{d\boldsymbol{Y}}{dx}=\boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{F}(x)$$

在一定条件下,保留一个未知函数,逐次微分每一个方程和消去其余的 $n-1$ 个未知函数,可以将方程组化为只含一个未知函数的高阶微分方程式.如果能求得这个高阶方程式的通解,则由消去的过程与原方程组,可以求得其余的 $n-1$ 个未知函数. 这种求线性方程组通解的方法称为消元法.

例如,求解方程组

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}=-2y, \\ \frac{dy}{dt}=-2x, \end{cases}$$

可先微分第一个方程,得 $\frac{d^2x}{dt^2}=-2\frac{dy}{dt}$. 代入第二个方程,得

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-2(-2x) \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2}-4x=0$$

是二阶线性微分方程，用特征方程法可求得

$$x=C_1\mathrm{e}^{2t}+C_2\mathrm{e}^{-2t},$$

再由$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=2y$，得

$$y=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-C_1\mathrm{e}^{2t}+C_2\mathrm{e}^{2t}.$$

于是，方程组通解为

$$\begin{cases}x=C_1\mathrm{e}^{2t}+C_2\mathrm{e}^{-2t},\\ y=-C_1\mathrm{e}^{2t}+C_2\mathrm{e}^{2t}.\end{cases}$$

3. 什么是可积组合法？

答 用组合积分方法求方程组通积分的方法，称为组合积分法.

例如，求解方程组

$$\begin{cases}t\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y,\\ t\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=x,\end{cases}$$

先将方程组写成对称形式

$$\frac{\mathrm{d}x}{y}=\frac{\mathrm{d}y}{x}=\frac{\mathrm{d}t}{t},$$

再利用比例的等比性质，得

$$\frac{\mathrm{d}x+\mathrm{d}y+\mathrm{d}t}{y+x+t}=\frac{\mathrm{d}t}{t}\Rightarrow\frac{\mathrm{d}(x+y+t)}{x+y+t}=\frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

积分，得 $\ln|x+y+t|=\ln|t|+\ln|C_1+1|.$

从而得 $\frac{x+y}{t}=C_1.$

又由$\frac{\mathrm{d}x}{y}=\frac{\mathrm{d}y}{x}$，得$x^2-y^2=C_2$.

于是，方程组通积分为

$$\begin{cases}\frac{x+y}{t}=C_1,\\ x^2-y^2=C_2.\end{cases}$$

方法、技巧与典型例题分析

熟悉一阶线性微分方程组的基本概念，能将方程组写成相应的矩阵形式或纯量形式，能将高阶微分方程式化为一阶线性方程组.

例 1 指出下列方程中，哪些是线性的.

(1) $\dfrac{dx}{dt}+2x^2-t=3$；　　(2) $\dfrac{dx}{dt}+2t^2x+e^t=0$；

(3) $\begin{cases} y'=1-1/z, \\ z'=1/(y-x)\text{；} \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=3tx+2xy, \\ \dfrac{dy}{dt}=4x+ty\text{；} \end{cases}$

(5) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}=x^3y+z\sin x, \\ \dfrac{dz}{dx}=y\cos x-x^2z\text{；} \end{cases}$　　(6) $\begin{cases} \dot{x}=y+z, \\ \dot{y}=x+z, \\ \dot{z}=x+y+1\text{；} \end{cases}$

(7) $\dfrac{d}{dt}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos t & 1 \\ 1 & \cos t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}$.

解 题(2)，(5)，(6)，(7)是线性方程，题(1)，(3)，(4)不是线性方程.

例 2 将下列方程写成矩阵向量形式或纯量形式：

(1) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=y, \\ \dfrac{dy}{dt}=z, \\ \dfrac{dz}{dt}=x-3y+3z\text{；} \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} \dot{x}=-x-2y+2e^{-t}, \\ \dot{y}=3x+4y+e^{-t}\text{；} \end{cases}$

(3) $\dfrac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 2 & -3 & -2 \\ 4 & -2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 \\ \cos t \\ t \end{pmatrix}$.

解 (1) $\dfrac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

(2) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\mathrm{e}^{-t}$.

(3) $\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=2x-2y+4z+1, \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=2x-3y-2z+\cos t, \\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=4x-2y+6z+t. \end{cases}$

例 3 将初值问题

$$x''+2x'-8x=\mathrm{e}^t, \quad x(0)=1, \quad x'(0)=4$$

化为矩阵向量形式的一阶线性方程组.

解 设 $x_1(t)=x, x_2(t)=x'$,则有

$$x_2'=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-2x'+8x+\mathrm{e}^t=-2x_2+8x_1+\mathrm{e}^t,$$

即
$$\begin{cases} x_1'=x_2, \\ x_2'=8x_1-2x_2+\mathrm{e}^t. \end{cases}$$

故有矩阵向量形式的一阶线性方程组

$$\boldsymbol{x}'(t)=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{F}(t)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 8 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{e}^t \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}(0)=\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

例 4 将下列方程式化为一阶微分方程组:

(1) $\ddot{x}+f(t)\dot{x}+g(t)=0$;

(2) $y'''+a_1(x)y''+a_2(x)y'+a_3(x)y=0$.

解 (1) 令 $\dot{x}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y$,则 $\ddot{x}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$,原方程化为形如

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y, \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-f(t)y-g(t) \end{cases}$$

的一阶微分方程组.

(2) 令 $y=y_0, y'=\frac{\mathrm{d}y_0}{\mathrm{d}t}=y_1, y''=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y_0}{\mathrm{d}t}\right)=\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t}=y_2$,则原方程化为形如

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y_0}{\mathrm{d}t}=y_1,\\ \dfrac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t}=y_2,\\ \dfrac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}t}=-a_1(x)y_2-a_2(x)y_1-a_3(x)y_0\end{cases}$$

的一阶微分方程组.

例 5 将微分方程组

$$\begin{cases}2\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}-\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}-4x=2t,\\ 4\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+2\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}-3y=0\end{cases} \qquad ①$$

化为一阶微分方程组.

解 令$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=z$,则$\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$,式①改写为

$$\begin{cases}2\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}-\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}-4x=2t,\\ 4\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+2\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}-3y=0,\\ \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}-z=0,\end{cases}$$

再化为一阶微分方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{1}{4}z+\dfrac{3}{8}y+2x+t,\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{1}{2}z+\dfrac{3}{4}y,\\ \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=z.\end{cases}$$

例 6 将微分方程$\dfrac{\mathrm{d}^4x}{\mathrm{d}t^4}+2\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+x=0$化为二阶微分方程组.

解 令$\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=y$,则$\dfrac{\mathrm{d}^4x}{\mathrm{d}t^4}=\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}$,代入方程得

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+2y+x=0,\\ \dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}-y=0\end{cases}$$

为二阶微分方程组.

例7 将下列方程式(组)化成一阶方程组:

(1) $m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+c\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+kx=f(t)$;

(2) $\begin{cases}\frac{\mathrm{d}^2y_1}{\mathrm{d}x^2}=a_1y_1+b_1y_2+c_1y_3,\\ \frac{\mathrm{d}^2y_2}{\mathrm{d}x^2}=a_2y_1+b_2y_2+c_2y_3,\\ \frac{\mathrm{d}^2y_3}{\mathrm{d}x^2}=a_3y_1+b_3y_2+c_3y_3.\end{cases}$

解 (1) 见疑难解析.

(2) 令 $y_1=z_1,y_2=z_3,y_3=z_5,\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x}=z_2,\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x}=z_4,\frac{\mathrm{d}y_3}{\mathrm{d}x}=z_6$,则有

$$\frac{\mathrm{d}^2y_1}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}z_2}{\mathrm{d}x},\quad \frac{\mathrm{d}^2y_2}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}z_4}{\mathrm{d}x},\quad \frac{\mathrm{d}^2y_3}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}z_6}{\mathrm{d}x},$$

于是,原二阶微分方程组可化为如下形式的一阶微分方程组

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}z_1}{\mathrm{d}x}=z_2,\\ \frac{\mathrm{d}z_2}{\mathrm{d}x}=a_1z_1+b_1z_3+c_1z_5,\\ \frac{\mathrm{d}z_3}{\mathrm{d}x}=z_4,\\ \frac{\mathrm{d}z_4}{\mathrm{d}x}=a_2z_1+b_2z_3+c_2z_5,\\ \frac{\mathrm{d}z_5}{\mathrm{d}x}=z_6,\\ \frac{\mathrm{d}z_6}{\mathrm{d}x}=a_3z_1+b_3z_3+c_3z_5.\end{cases}$$

例8 求下列微分方程组的通解:

(1) $\begin{cases}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{x}{t},\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{\tan y}{t};\end{cases}$ (2) $\begin{cases}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{x}{y},\\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{x^2+y^2}{y}.\end{cases}$

解 (1) 由$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{x}{t}$,分离变量后两端积分,得$x=t\mathrm{e}^{C}=C_1t$.

由$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{\tan y}{t}$,分离变量后积分,得$\sin y=C_2t$.所以,方程组通解为

$$\begin{cases}x=C_1t,\\ \sin y=C_2t.\end{cases}$$

(2) 由$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{x}{y}$,分离变量后积分,得$x^2-y^2=C_1$.

由 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{x^2+y^2}{y}=x\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)+y\Rightarrow \mathrm{d}z=\left(x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y\right)\mathrm{d}x$.
两端积分,得$z=xy+C_2$.

所以,方程组通解为

$$\begin{cases}x^2-y^2=C_1,\\ z=xy+C_2.\end{cases}$$

例9 求下列微分方程组的通解或通积分:

(1) $\frac{\mathrm{d}t}{t^2+x}=\frac{\mathrm{d}x}{t}=\frac{\mathrm{d}y}{t(x+y)}$;

(2) $\frac{\mathrm{d}x}{x(y^2-z^2)}=\frac{\mathrm{d}y}{y(z^2-x^2)}=\frac{\mathrm{d}z}{z(x^2-y^2)}$;

(3) $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+u}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{e}^y+u}=\frac{\mathrm{d}u}{u^2-\mathrm{e}^{x+y}}$.

解 (1) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{t(x+y)}{t}=x+y$是一阶线性微分方程,其解为

$$y=-x-1+C_1\mathrm{e}^x.$$

$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{t^2+x}{t}=t+\frac{x}{t}$是贝努利方程,其解为$t^2+x+\frac{1}{2}=C_2\mathrm{e}^{2x}$.

故微分方程组的通积分为

$$\begin{cases}y+x+1=C_1\mathrm{e}^x,\\ t^2+x+\frac{1}{2}=C_2\mathrm{e}^{2x}.\end{cases}$$

(2) 因为

$$\frac{dx}{x(y^2-z^2)}=\frac{dy}{y(z^2-x^2)}=\frac{dz}{z(x^2-y^2)}$$

$$=\frac{x\,dx+y\,dy+z\,dz}{x^2(y^2-z^2)+y^2(z^2-x^2)+z^2(x^2-y^2)}$$

$$=\frac{x\,dx+y\,dy+z\,dz}{0},$$

故
$$x\,dx+y\,dy+z\,dz=0,$$

积分，得
$$x^2+y^2+z^2=C_1.$$

由
$$\frac{\frac{1}{x}dx}{y^2-z^2}=\frac{\frac{1}{y}dy}{z^2-x^2}=\frac{\frac{1}{z}dz}{x^2-y^2}=\frac{\frac{1}{x}dx+\frac{1}{y}dy+\frac{1}{z}dz}{0},$$

得
$$\frac{1}{x}dx+\frac{1}{y}dy+\frac{1}{z}dz=0 \Rightarrow \ln x+\ln y+\ln z=C_2.$$

故微分方程组通解为

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=C_1, \\ \ln x+\ln y+\ln z=C_2. \end{cases}$$

（3）由
$$\frac{dx}{e^x+u}=\frac{dy}{e^y+u}=\frac{du}{u^2-e^{x+y}}$$

$$=\frac{dx+e^{-y}du-ue^{-y}dy}{e^y+u+e^{-y}(u^2-e^{x+y})-ue^{-y}(e^y+u)}$$

$$=\frac{dx+d(ue^{-y})}{0},$$

得
$$dx+d(ue^{-y})=0 \Rightarrow x+ue^{-y}=C_1.$$

由
$$\frac{dx}{e^x+u}=\frac{dy}{e^y+u}=\frac{du}{u^2-e^{x+y}}$$

$$=\frac{dy+e^{-x}du-ue^{-x}dx}{e^y+u+e^{-x}(u^2-e^{x+y})-ue^{-x}(e^x+u)}$$

$$=\frac{dy+d(ue^{-x})}{0},$$

得
$$dy+d(ue^{-x})=0 \Rightarrow y+ue^{-x}=C_2.$$

故微分方程组通解为

$$\begin{cases} x+ue^{-y}=C_1, \\ y+ue^{-x}=C_2. \end{cases}$$

第二节　线性齐次方程组的一般理论

主 要 内 容

1. **定理 4.2**　如果

$$Y_1=\begin{pmatrix} y_{11}(x) \\ y_{21}(x) \\ \vdots \\ y_{n1}(x) \end{pmatrix},\quad Y_2=\begin{pmatrix} y_{12}(x) \\ y_{22}(x) \\ \vdots \\ y_{n2}(x) \end{pmatrix},\quad \cdots,\quad Y_m=\begin{pmatrix} y_{1m}(x) \\ y_{2m}(x) \\ \vdots \\ y_{nm}(x) \end{pmatrix}$$

是方程组$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}x}=A(x)Y$ 的 m 个解，则

$$Y=C_1Y_1+C_2Y_2+\cdots+C_mY_m \qquad ①$$

也是方程组的解，其中$C_1,C_2,\cdots,C_m$ 是任意常数. 即线性齐次方程组$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}x}=A(x)Y$ 的任何有限个解的线性组合仍是齐次方程组的解.

2. **定义 4.1**　设$Y_1(x),Y_2(x),\cdots,Y_m(x)$是 m 个定义在区间 I 上的 n 维向量函数. 如果存在 m 个不全为零的常数$C_1,C_2,\cdots,C_m$，使得

$$C_1Y_1(x)+C_2Y_2(x)+\cdots+C_mY_m(x)=\mathbf{0}\text{(零向量)} \qquad ②$$

在区间 I 上恒成立，则称这 m 个向量**在区间 I 上线性相关**；否则称这 m 个向量**在区间 I 上线性无关**.

两个向量函数 Y_1 与 Y_2 的对应分量成比例，则它们在区间 I 上线性相关. 一个向量函数组中有一零向量函数，则这个向量函数组在区间 I 上线性相关.

但是，向量函数组的线性相关概念与它们的相应分量的线性相关概念不等价.

3. n 个 n 维向量函数组

$$Y_1(x),Y_2(x),\cdots,Y_n(x) \qquad ③$$

的列向量所组成的行列式

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_{11}(x) & y_{12}(x) & \cdots & y_{1n}(x) \\ y_{21}(x) & y_{22}(x) & \cdots & y_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{n1}(x) & y_{n2}(x) & \cdots & y_{nn}(x) \end{vmatrix} \qquad ④$$

称为向量组③的**朗斯基行列式**.

定理4.3 如果向量组③在区间上线性相关,则它的朗斯基行列式$W(x)$在I上恒等于零.

定理4.4 如果$\boldsymbol{Y}_1(x),\boldsymbol{Y}_2(x),\cdots,\boldsymbol{Y}_n(x)$是方程组$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Y}}{\mathrm{d}x}=\boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{Y}$的$n$个线性无关解,则它的朗斯基行列式$W(x)$在$I$上恒不为零.

推论4.1 如果向量组③的朗斯基行列式在区间I上的某一点x_0处不等于零,$W(x_0)\neq 0$,则向量组③在I上线性无关.

推论4.2 如果方程组$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Y}}{\mathrm{d}x}=\boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{Y}$的$n$个解的朗斯基行列式$W(x)$在其定义的区间$I$上某一点$x_0$等于零,$W(x_0)=0$,则该解组在$I$上必线性相关.

推论4.3 方程组$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Y}}{\mathrm{d}x}=\boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{Y}$的$n$个解在其定义区间$I$上线性无关的充要条件是它们的朗斯基行列式$W(x)$在$I$上任一点处不为零.

4. 齐次方程组$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Y}}{\mathrm{d}x}=\boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{Y}$的$n$个线性无关解称为方程组的**基本解组**.

定理4.5 齐次方程组$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Y}}{\mathrm{d}x}=\boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{Y}$必存在基本解组.

满足初始条件

$$\boldsymbol{Y}_1(x_0)=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{Y}_2(x_0)=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\quad \cdots,\quad \boldsymbol{Y}_n(x_0)=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix},$$

$$x_0 \in I \qquad ⑤$$

的基本解组称为方程组$\frac{dY}{dx}=A(x)Y$ 的**标准的基本解组**.

定理 4.6 如果$Y_1(x),Y_2(x),\cdots,Y_n(x)$是齐次方程组$\frac{dY}{dx}=A(x)Y$的基本解组,则其线性组合

$$C_1Y_1(x)+C_2Y_2(x)+\cdots+C_nY_n(x) \qquad ⑥$$

是方程组的通解.

推论 4.4 线性齐次方程组$\frac{dY}{dx}=A(x)Y$ 的线性无关的解的个数不能多于n 个.

线性齐次方程组$\frac{dY}{dx}=A(x)Y$ 的解的全体构成一个n **维线性空间.**

5. **定理4.7** 如果$Y_1(x),Y_2(x),\cdots,Y_n(x)$是齐次方程组$\frac{dY}{dx}=A(x)Y$ 的n 个解,则这n 个解的朗斯基行列式与方程组的系数有如下关系式:

$$W(x)=W(x_0)e^{\int_{x_0}^{x}[a_{11}(t)+a_{22}(t)+\cdots+a_{nn}(t)]dt}, \qquad ⑦$$

式⑦称为刘维尔公式.

$\sum_{k=1}^{n}a_{kk}$称为方阵A 的迹,记为$\mathrm{tr}A$,故式⑦也可表示为

$$W(x)=W(x_0)e^{\int_{x_0}^{x}\mathrm{tr}A(t)dt}.$$

疑 难 解 析

1. 怎样判定线性齐次方程组$\frac{dY}{dx}=A(x)Y$ 的基本解组?

答 对已求得的n 个解,要判别是否为已知齐次方程组的基本解组,主要依据是推论4.3. 即计算其朗斯基行列式在I 上某一点处的值,若其值不为零,则此n 个解线性无关,是基本解组. 特别要注意到,这一点必须在定义区间I 上. 例如,方程组

$$\begin{cases} x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2y-z, \\ x\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=2y-z \end{cases}$$

有两个解$\begin{pmatrix} y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$，它们线性无关.

它们的朗斯基行列式为

$$W(x)=\begin{vmatrix} x & 1 \\ x & 2 \end{vmatrix}=x\neq 0 \quad (x\neq 0).$$

但在 $x=0$ 时，$W(x)=0$. 这是因为 $x=0$ 不在定义区间上$\left(\text{由}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{2y-z}{x}\text{可知}\right)$.

2. 线性齐次方程组与基本解组之间存在什么样的关系？

答 基本解组唯一确定线性齐次方程组.

一个线性齐次方程组必存在基本解组，且存在无穷多个基本解组.

若 $\boldsymbol{Y}_1(x),\boldsymbol{Y}_2(x),\cdots,\boldsymbol{Y}_n(x)$ 线性无关且连续可微，$\boldsymbol{Y}_i(x)=(y_{1i},y_{2i},\cdots,y_{ni})^{\mathrm{T}}(i=1,2,\cdots,n)$，其朗斯基行列式

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{vmatrix}\neq 0.$$

再令 $\boldsymbol{Y}(x)=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}$，则线性方程组

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} & \dfrac{\mathrm{d}y_{i1}}{\mathrm{d}x} & \dfrac{\mathrm{d}y_{i2}}{\mathrm{d}x} & \cdots & \dfrac{\mathrm{d}y_{in}}{\mathrm{d}x} \\ y_1 & y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_2 & y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_n & y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{vmatrix}=0 \quad (i=1,2,\cdots,n) \qquad ①$$

是以 $\boldsymbol{Y}_1(x),\boldsymbol{Y}_2(x),\cdots,\boldsymbol{Y}_n(x)$ 为基本解组的线性齐次方程组，是由基本解组唯一确定的.

因为，方程组$\frac{d\boldsymbol{Y}}{dx}=\boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{Y}$的基本解组$\boldsymbol{Y}_1(x),\boldsymbol{Y}_2(x),\cdots,\boldsymbol{Y}_n(x)$构成方程组的**基本解矩阵**为

$$\boldsymbol{\Phi}(x)=\begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{pmatrix}.$$

由恒等式$\frac{d\boldsymbol{\Phi}(x)}{dx}=\boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{\Phi}(x)$可以得出

$$\boldsymbol{A}(x)=\frac{d\boldsymbol{\Phi}(x)}{dx}=\boldsymbol{\Phi}^{-1}(x).$$

可见$\boldsymbol{A}(x)$是由$\boldsymbol{\Phi}(x)$唯一确定的，即方程组由基本解组唯一确定(易知$|\boldsymbol{\Phi}(x)|\neq 0$，$\boldsymbol{\Phi}^{-1}(x)$存在).

方法、技巧与典型例题分析

本节要求熟知向量函数在区间上的线性相关性概念，能够判断向量函数的线性相关性.

例1 验证$\begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 3e^{-t} \\ 5e^{-t} \end{pmatrix}$是方程组

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

的两个线性无关解，并写出方程组的通解.

解 直接代入验证知，$\begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 3e^{-t} \\ 5e^{-t} \end{pmatrix}$都是方程组的解. 因为它们的朗斯基行列式

$$W(t)=\begin{vmatrix} e^t & 3e^{-t} \\ e^t & 5e^{-t} \end{vmatrix}=2\neq 0,$$

所以两个解线性无关，其通解为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=C_1\begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix} 3e^{-t} \\ 5e^{-t} \end{pmatrix}.$$

例 2 验证$\begin{pmatrix} t+1 \\ -t+1 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} (t+1)\ln t+1 \\ (-t+1)\ln t+1 \end{pmatrix}$是方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{t^2}\right)x+\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{t}+\dfrac{1}{t^2}\right)y, \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\dfrac{1}{2}\left(-1+\dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{t^2}\right)x+\dfrac{1}{2}\left(-1+\dfrac{1}{t}+\dfrac{1}{t^2}\right)y \end{cases}$$

的两个线性无关解，并写出其通解.

解 直接代入验证知，它们都是方程组的解. 因为它们的朗斯基行列式在 $x=1$ 处的值

$$W(1)=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1\neq 0,$$

所以它们是线性无关解，方程组的通解为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} C_1(t+1)+C_2(t+1)\ln t+C_2 \\ C_1(-t+1)+C_2(-t+1)\ln t+C_2 \end{pmatrix} \quad (0,+\infty).$$

例3 已知线性齐次方程组的两个解为$\begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix}$，求该线性方程组.

解 $\begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix}$是线性无关的. 依照疑难解析2 中式①，线性齐次方程组为

$$\begin{vmatrix} x_1' & \dfrac{\mathrm{d}e^{3t}}{\mathrm{d}t} & \dfrac{\mathrm{d}e^{-t}}{\mathrm{d}t} \\ x_1 & e^{3t} & e^{-t} \\ x_2 & e^{3t} & -e^{-t} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x_1' & 3e^{3t} & -e^{-t} \\ x_1 & e^{3t} & e^{-t} \\ x_2 & e^{3t} & -e^{-t} \end{vmatrix}$$

$$=-2e^{2t}x_1'+2e^{2t}x_1+4e^{2t}x_2=0.$$

例 4 求解方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=p(t)x+q(t)y, & ① \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=q(t)x+p(t)y, & ② \end{cases}$$

其中 $p(t)$，$q(t)$在$[a,b]$上连续.

解 将式①加上式②,得

$$\frac{\mathrm{d}(x+y)}{\mathrm{d}t}=[p(t)+q(t)](x+y), \qquad ③$$

将式①减去式②得

$$\frac{\mathrm{d}(x-y)}{\mathrm{d}t}=[p(t)-q(t)](x-y), \qquad ④$$

用积分法可求得

$$x+y=C_1\mathrm{e}^{\int[p(t)+q(t)]\mathrm{d}t},$$

$$x-y=C_2\mathrm{e}^{\int[p(t)-q(t)]\mathrm{d}t}.$$

解上述代数方程,得原方程组通解为

$$\begin{cases} x=\dfrac{1}{2}\left(C_1\mathrm{e}^{\int[p(t)+q(t)]\mathrm{d}t}+C_2\mathrm{e}^{\int[p(t)-q(t)]\mathrm{d}t}\right), \\ y=\dfrac{1}{2}\left(C_1\mathrm{e}^{\int[p(t)+q(t)]\mathrm{d}t}-C_2\mathrm{e}^{\int[p(t)-q(t)]\mathrm{d}t}\right). \end{cases}$$

例 5 设 $n\times n$ 矩阵函数 $\boldsymbol{A}_1(t),\boldsymbol{A}_2(t)$ 在 (a,b) 内连续,证明:若方程组

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}_1(t)X, \quad \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}_2(t)X$$

有相同的基本解组,则 $\boldsymbol{A}_1(t)\equiv\boldsymbol{A}_2(t)$.

证 由疑难解析 2 可知,若设这两个方程组的基本解组为 $\boldsymbol{X}_1(t),\boldsymbol{X}_2(t),\cdots,\boldsymbol{X}_n(t)$,故其基本解矩阵为

$$\boldsymbol{\Phi}(t)=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}.$$

则由恒等式 $\dfrac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{\Phi}(t)}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}_1(t)\boldsymbol{\Phi}(t)$, $\dfrac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{\Phi}(t)}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}_2(t)\boldsymbol{\Phi}(t)$,得

$$\boldsymbol{A}_1(t)=\frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{\Phi}(t)}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t)=\boldsymbol{A}_2(t).$$

例 6 求解下列方程组:

(1) $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=\lambda_1 x,\\ \dfrac{dy}{dt}=\lambda_2 y;\end{cases}$ (2) $\begin{cases}\dfrac{dr}{dt}=-r(r^2-1),\\ \dfrac{d\theta}{dt}=1;\end{cases}$ (3) $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=\lambda x,\\ \dfrac{dy}{dt}=x+\lambda y.\end{cases}$

解 (1) 对$\dfrac{dx}{dt}=\lambda_1 x$ 两端积分，得$x=C_1e^{\lambda_1 t}$，对$\dfrac{dy}{dt}=\lambda_2 y$ 两端积分，得 $y=C_2e^{\lambda_2 t}$，故原方程组通解为

$$\begin{cases}x=C_1e^{\lambda_1 t},\\ y=C_2e^{\lambda_2 t}.\end{cases}$$

(2) 将$\dfrac{dr}{dt}=-r(r^2-1)$化为

$$\frac{dr}{r(r^2-1)}=-dt \Rightarrow \frac{1}{2}\frac{dr^2}{r^2(r^2-1)}=-dt,$$

解得
$$r^2=\frac{C_1e^{2t}}{C_1e^{2t}+1},\quad C_1=\frac{r_0^2}{1-r_0^2}\quad (r_0=r(0)).$$

由$\dfrac{d\theta}{dt}=1$，解得

$$\theta=t+C_2\quad (C_2=\theta(0)).$$

故原方程组通解为

$$\begin{cases}r^2=\dfrac{C_1e^{2t}}{C_1e^{2t}+1},\\ \theta=t+C_2.\end{cases}$$

(3) 由$\dfrac{dx}{dt}=\lambda x$ 解得 $x=C_1e^{\lambda t}$.

代入第二个方程，得$\dfrac{dy}{dt}=C_1e^{\lambda t}+\lambda y$，解得

$$y=C_1te^{\lambda t}+C_2e^{\lambda y}.$$

故方程组通解为

$$\begin{cases}x=C_1e^{\lambda t},\\ y=C_1te^{\lambda t}+C_2e^{\lambda t}.\end{cases}$$

例 7 试证线性非齐次方程组$\dfrac{d\boldsymbol{Y}}{dx}=\boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{F}(x)$满足初始条

件$\boldsymbol{Y}(x_0)=\boldsymbol{Y}_0$解的唯一性等价于齐次方程组$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Y}}{\mathrm{d}x}=\boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{Y}$满足初始条件$\boldsymbol{Y}(x_0)=0$的零解的唯一性.

证 必要性 设$\boldsymbol{Y}_0(x)$是非齐次方程组的唯一解，显然$\boldsymbol{Y}(x)\equiv 0$满足齐次方程组. 若齐次方程组还有非零解$\boldsymbol{Y}_1,\boldsymbol{Y}_2$，满足$\boldsymbol{Y}(x_0)=0$，且$\boldsymbol{Y}_1\not\equiv\boldsymbol{Y}_2$，则$\boldsymbol{Y}_0+\boldsymbol{Y}_1,\boldsymbol{Y}_0+\boldsymbol{Y}_2$是非齐次方程组满足$\boldsymbol{Y}(x_0)=\boldsymbol{Y}_0$的解，且$\boldsymbol{Y}_0+\boldsymbol{Y}_1\not\equiv\boldsymbol{Y}_0+\boldsymbol{Y}_2$，与非齐次方程组只有唯一解矛盾. 故齐次方程组只有零解.

充分性 设$\boldsymbol{Y}$是齐次方程组满足$\boldsymbol{Y}(x_0)=0$的唯一解，则$\boldsymbol{Y}(x)\equiv 0$. 若非齐次方程组满足$\boldsymbol{Y}(x_0)=\boldsymbol{Y}_0$的解不唯一，不妨令$\boldsymbol{Y}_1(x)$，$\boldsymbol{Y}_2(x)$是其两个解，且$\boldsymbol{Y}_1(x)\not\equiv\boldsymbol{Y}_2(x)$. 则

$$\frac{\mathrm{d}(\boldsymbol{Y}_1-\boldsymbol{Y}_2)}{\mathrm{d}x}=\boldsymbol{A}(x)(\boldsymbol{Y}_1-\boldsymbol{Y}_2)+\boldsymbol{F}(x)-\boldsymbol{F}(x)=\boldsymbol{A}(x)(\boldsymbol{Y}_1-\boldsymbol{Y}_2),$$

且$(\boldsymbol{Y}_1-\boldsymbol{Y}_2)(x_0)=0$，但$\boldsymbol{Y}_1-\boldsymbol{Y}_2\not\equiv 0$，与齐次方程组只有唯一零解矛盾. 故非齐次方程组的解唯一.

例8 已知$\begin{pmatrix}\sin t\\ \cos t\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\cos t\\ -\sin t\end{pmatrix}$是方程组

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}(t) & a_{12}(t)\\ a_{21}(t) & a_{22}(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$$

的基本解组，求$a_{ij}(x)(i,j=1,2)$.

解 将基本解组代入方程组，得

$$\begin{cases}\cos t=a_{11}(t)\sin t+a_{12}(t)\cos t, & ①\\ -\sin t=a_{21}(t)\sin t-a_{22}(t)\cos t, & ②\\ -\sin t=a_{11}(t)\cos t-a_{12}(t)\sin t, & ③\\ -\cos t=a_{21}(t)\cos t-a_{22}(t)\sin t. & ④\end{cases}$$

分别求解式①和式③，式②与式④，得

$$a_{11}(t)=\frac{\begin{vmatrix}\cos t & \cos t\\ -\sin t & -\sin t\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\sin t & \cos t\\ \cos t & -\sin t\end{vmatrix}}=0,\quad a_{12}(t)=-\begin{vmatrix}\sin t & \cos t\\ \cos t & -\sin t\end{vmatrix}=1,$$

$$a_{21}(t)=\frac{\begin{vmatrix}-\sin t & \cos t\\ -\cos t & -\sin t\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\sin t & \cos t\\ \cos t & -\sin t\end{vmatrix}}=-1,\quad a_{22}(t)=-\begin{vmatrix}\sin t & -\sin t\\ \cos t & -\cos t\end{vmatrix}=0,$$

故 $$a_{11}(t)=a_{22}(t)=0,\quad a_{12}(t)=-a_{21}(t)=1.$$

例 9 证明：如果$\int_{x_0}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}a_{ij}(x)\mathrm{d}x=+\infty$，则线性齐次微分方程组$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Y}}{\mathrm{d}x}=\boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{Y}$至少存在一个解在区间$[x_0,+\infty)$上是无界的.

证 用反证法. 设方程组$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Y}}{\mathrm{d}x}=\boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{Y}$的所有解在$[x_0,+\infty)$上都是有界的，则它的任何$n$个线性无关的解也是有界的. 从而，它的任一基本解组的朗斯基行列式$W(x)$也是有界的. 而由刘维尔公式

$$W(x)=W(x_0)\mathrm{e}^{\int_{x_0}^{x}\sum_{i=1}^{n}a_{ii}(\xi)\mathrm{d}\xi},$$

其中$W(x_0)\neq0$. 则由已知条件，有

$$\lim_{n\to+\infty}|W(x)|=\lim_{n\to\infty}|W(x_0)|\mathrm{e}^{\int_{x_0}^{x}\sum_{i=1}^{n}a_{ii}(\xi)\mathrm{d}\xi}=+\infty$$

这与$W(x)$在$[x_0,+\infty)$上有界矛盾.

例 10 验证向量值函数$\boldsymbol{x}(t)=\begin{pmatrix}t\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{y}(t)=\begin{pmatrix}1\\t\end{pmatrix}$，在$(-\infty,+\infty)$上线性无关，但在$t_1=1$，$t_2=-1$时，$\boldsymbol{x}(t_i)$与$\boldsymbol{y}(t_i)$($i=1,2$)线性相关.

解 设有k_1,k_2，使得$k_1\boldsymbol{x}(t)+k_2\boldsymbol{y}(t)=0$，即

$$\begin{pmatrix}k_1t+k_2\\k_1+k_2t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad k_1=k_2=0,$$

所以，$\boldsymbol{x}(t)$，$\boldsymbol{y}(t)$线性无关.

当$t_1=1$，$t_2=-1$时，

$$\begin{pmatrix}k_1t+k_2\\k_1+k_2t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t&1\\1&t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1\\k_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

有非零解，所以$\boldsymbol{x}(t)$与$\boldsymbol{y}(t)$线性相关.

例 11 设 $V_i \in \mathbf{R}^n$，$V_i \neq \mathbf{0}$（零向量），$\lambda_i \in C$ 且互不相同（$i=1,2,\cdots,m$），证明：向量值函数 $V_1 e^{\lambda_1 t}, V_2 e^{\lambda_2 t}, \cdots, V_m e^{\lambda_m t}$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上线性无关.

证 因为 $V_i \neq \mathbf{0}$，所以，对任意的 $i \neq j$，$\dfrac{V_i e^{\lambda_i t}}{V_j e^{\lambda_j t}}$ 不为常数，所以 $V_1 e^{\lambda_1 t}, V_2 e^{\lambda_2 t}, \cdots, V_m e^{\lambda_m t}$ 线性无关.

例 12 设 $A(t)$ 为实矩阵，$X=X(t)$ 是 $\dfrac{dX}{dt}=A(t)X$ 的复值解，证明：$X(t)$ 的实部和虚部都是此方程组的解.

证 设 $X(t)=X_1(t)+iX_2(t)$. 因为 $X=X(t)$ 是方程组的解，故

$$\frac{d(X_1(t)+iX_2(t))}{dt}=A(t)(X_1(t)+iX_2(t)),$$

所以
$$\frac{dX_1(t)}{dt}+i\frac{dX_2(t)}{dt}=A(t)X_1(t)+iA(t)X_2(t),$$

从而
$$\frac{dX_1(t)}{dt}=A(t)X_1(t),\quad \frac{dX_2(t)}{dt}=A(t)X_2(t),$$

即 $X(t)$ 的实部与虚部都是此方程组的解.

例 13 设 $A(t)$ 为实矩阵，$(X_1(t),X_2(t),\cdots,X_n(t))$ 是 $\dfrac{dX}{dt}=A(t)X$ 的基解矩阵，其中 $X_1(t)$ 与 $X_2(t)$ 是一对共轭复值解向量，记

$$Y_1(t) \xlongequal{\text{def}} \mathrm{Re}X_1(t)=\frac{1}{2}(X_1(t)+X_2(t)),$$

$$Y_2(t) \xlongequal{\text{def}} \mathrm{Im}X_2(t)=\frac{1}{2i}(X_1(t)-X_2(t)).$$

证明：用向量 Y_1, Y_2 代替 X_1, X_2 后所得的矩阵 $(Y_1(t),Y_2(t),X_3(t),\cdots,X_n(t))$ 也是原方程组的一个基解矩阵.

证 因为

$$(Y_1(t),Y_2(t),X_3(t),\cdots,X_n(t))=(X_1(t),X_2(t),\cdots,X_n(t))B$$

其中
$$B=\left(\begin{array}{cc|c} 1/2 & 1/2i & \\ 1/2 & -1/2i & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{\mathbf{0}} & E_{n-2} \end{array}\right),$$

且 $|\boldsymbol{B}|=-\frac{1}{2\mathrm{i}}\neq 0$，故 $\boldsymbol{B}$ 为非奇异方阵．所以，$(\boldsymbol{Y}_1(t),\boldsymbol{Y}_2(t),\boldsymbol{X}_3(t),\cdots,\boldsymbol{X}_n(t))$ 也是原方程组的一个基解矩阵．

例 14 证明：若 $\boldsymbol{X}(t)$ 是 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{X}$ 的基解矩阵，则 $(\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}(t))^{-1}$ 是 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}t}=-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{X}$ 的基解矩阵．

证 因为 $\boldsymbol{X}(t)$ 为 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{X}$ 的基解矩阵，有 $\det\boldsymbol{X}(t)\neq 0$，所以 $\det(\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}(t))^{-1}\neq 0$．

又有 $\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{X}^{-1}=\boldsymbol{E}$，且 $\boldsymbol{X}(t)$ 满足 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{X}$，所以

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}^{-1}}{\mathrm{d}t}+\boldsymbol{X}^{-1}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{E}}{\mathrm{d}t}=0.$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}^{-1}}{\mathrm{d}t}=-\boldsymbol{X}^{-1}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{X}^{-1}=-\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{-1}=-\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{A}(t),$$

故

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}(t))^{-1}&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{X}^{-1}(t))^{-1}=\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{X}^{-1}(t))\right)^{\mathrm{T}}\\&=(-\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{A}(t))^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(t)(\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}(t))^{-1},\end{aligned}$$

从而，$(\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}(t))^{-1}$ 为基解矩阵．

第三节　线性非齐次方程组的一般理论

主 要 内 容

形如

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Y}}{\mathrm{d}x}=\boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{F}(x) \qquad ①$$

的方程称为线性非齐次方程组．

1．**定理4.8** 如果 $\widetilde{\boldsymbol{Y}}(x)$ 是线性非齐次方程组①的解，而 $\boldsymbol{Y}_0(x)$ 是其对应齐次方程组 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Y}}{\mathrm{d}x}=\boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{Y}$ 的解，则 $\boldsymbol{Y}_0(x)+\boldsymbol{Y}(x)$ 是非齐次方程组①的解．

定理 4.9 线性非齐次方程组①的任意两个解之差是对应齐次方程组的解.

定理4.10 线性非齐次方程组①的通解等于其对应的齐次方程组的通解与非齐次方程组①的一个特解之和. 即若$\widetilde{\boldsymbol{Y}}(x)$是非齐次方程组①的一个特解,$\boldsymbol{Y}_1(x),\boldsymbol{Y}_2(x),\cdots,\boldsymbol{Y}_n(x)$是对应齐次方程组的$n$个线性无关解,则

$$\boldsymbol{Y}(x)=C_1\boldsymbol{Y}_1(x)+C_2\boldsymbol{Y}_2(x)+\cdots+C_n\boldsymbol{Y}_n(x)+\widetilde{\boldsymbol{Y}}(x) \qquad ②$$

是非齐次方程组①的通解.

2. 拉格朗日常数变易法.

定义$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Y}}{\mathrm{d}x}=\boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{Y}$ 的基本解矩阵

$$\boldsymbol{\Phi}(x)=\begin{pmatrix} y_{11}(x) & y_{12}(x) & \cdots & y_{1n}(x) \\ y_{21}(x) & y_{22}(x) & \cdots & y_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{n1}(x) & y_{n2}(x) & \cdots & y_{nn}(x) \end{pmatrix},$$

其每列均为$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Y}}{\mathrm{d}x}=\boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{Y}$ 的解 $\boldsymbol{Y}_i(x)(i=1,2,\cdots,n)$,且$\boldsymbol{Y}_1(x)$,$\boldsymbol{Y}_2(x),\cdots,\boldsymbol{Y}_n(x)$为其一个基本解组. 故$\det\boldsymbol{\Phi}(x)=W(x)\neq0$,则$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Y}}{\mathrm{d}x}=\boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{Y}$ 的通解可表示为

$$\boldsymbol{Y}(x)=\boldsymbol{\Phi}(x)\boldsymbol{C},\quad \boldsymbol{C}=(C_1,C_2,\cdots,C_n)^{\mathrm{T}}.$$

其中$C_i(i=1,2,\cdots,n)$为任意常数.

又
$$\widetilde{\boldsymbol{Y}}(x)=\boldsymbol{\Phi}(x)\boldsymbol{C}(x), \qquad ③$$

其中$\boldsymbol{C}(x)=(C_1(x),C_2(x),\cdots,C_n(x))^{\mathrm{T}}$,$C_i(x)(i=1,2,\cdots,n)$为未知函数.

将式③代入式①可得

$$\boldsymbol{\Phi}'(x)\boldsymbol{C}(x)+\boldsymbol{\Phi}(x)\boldsymbol{C}'(x)=\boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{\Phi}(x)\boldsymbol{C}(x)+\boldsymbol{F}(x).$$

解得
$$\boldsymbol{C}(x)=\int_{x_0}^{x}\boldsymbol{\Phi}^{-1}(\tau)\boldsymbol{F}(\tau)\mathrm{d}\tau,\quad x_0\in I. \qquad ④$$

则
$$\widetilde{\boldsymbol{Y}}(x)=\int_{x_0}^{x}\boldsymbol{\Phi}(x)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(\tau)\boldsymbol{F}(\tau)\mathrm{d}\tau. \qquad ⑤$$

故非齐次方程组①的通解公式为

$$\boldsymbol{Y}(x)=\boldsymbol{\Phi}(x)\boldsymbol{C}+\int_{x_0}^{x}\boldsymbol{\Phi}(x)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(\tau)\boldsymbol{F}(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

疑 难 解 析

在具体解题中，怎样求得非齐次方程组的通解？

答 求得非齐次方程组①的通解，要求出 $\boldsymbol{C}(x)=(C_1(x),C_2(x),\cdots,C_n(x))^{\mathrm{T}}$ 和 $\widetilde{\boldsymbol{Y}}(x)$. 其中 $\widetilde{\boldsymbol{Y}}(x)$ 可由式⑤直接计算，而 $\boldsymbol{C}(x)$ 由式④直接计算是困难的. 因此，在具体解题时，可由方程组

$$\begin{cases}C_1'(x)y_{11}(x)+C_2'(x)y_{12}(x)+\cdots+C_n'(x)y_{1n}(x)=f_1(x),\\ C_1'(x)y_{21}(x)+C_2'(x)y_{22}(x)+\cdots+C_n'(x)y_{2n}(x)=f_2(x),\\ \quad\vdots\\ C_1'(x)y_{n1}(x)+C_2'(x)y_{n2}(x)+\cdots+C_n'(x)y_{nn}(x)=f_n(x)\end{cases}$$

解得 $$C_i'(x)=\Psi_i(x)\quad(i=1,2,\cdots,n),$$

再得 $$C_i(x)=\int\Psi_i(x)\mathrm{d}x+C_i\qquad(i=1,2,\cdots,n).$$

方法、技巧与典型例题分析

本节要求通过例题进一步认识非齐次方程组 $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{Y}}{\mathrm{d}x}=\boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{F}(x)$ 的通解与对应齐次方程组 $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{Y}}{\mathrm{d}x}=\boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{Y}$ 的通解之间的关系，能讨论有关的问题.

例 1 求下列方程组的通解：

(1) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\mathrm{e}^t\\t^2\end{pmatrix}$;

(2) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-5\\1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\csc t\\\sec t\end{pmatrix}$.

解 (1) 将方程写成

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y+2\mathrm{e}^t, \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=x+t^2.\end{cases} \qquad ①$$

用消元法,求得方程组①的对应齐次方程通解

$$\begin{cases}x=C_1\mathrm{e}^t+C_2\mathrm{e}^{-t}, \\ y=C_1\mathrm{e}^t-C_2\mathrm{e}^{-t}.\end{cases} \qquad ②$$

设方程组①有形如

$$\begin{cases}\widetilde{x}=C_1(t)\mathrm{e}^t+C_2(t)\mathrm{e}^{-t}, \\ \widetilde{y}=C_1(t)\mathrm{e}^t-C_2(t)\mathrm{e}^{-t}\end{cases} \qquad ③$$

的特解,代入方程组①中,得

$$\begin{cases}C_1'(t)\mathrm{e}^t+C_2'(t)\mathrm{e}^{-t}=2\mathrm{e}^t, \\ C_1'(t)\mathrm{e}^t-C_2'(t)\mathrm{e}^{-t}=t^2,\end{cases} \qquad ④$$

可以解得

$$C_1'(t)=\frac{\begin{vmatrix}2\mathrm{e}^t & \mathrm{e}^{-t} \\ t^2 & -\mathrm{e}^{-t}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\mathrm{e}^t & \mathrm{e}^{-t} \\ \mathrm{e}^t & -\mathrm{e}^{-t}\end{vmatrix}}=-\frac{1}{2}(-2-t^2\mathrm{e}^{-t})=1+\frac{1}{2}t^2\mathrm{e}^{-t},$$

$$C_2'(t)=-\frac{1}{2}\begin{vmatrix}\mathrm{e}^t & 2\mathrm{e}^t \\ \mathrm{e}^t & t^2\end{vmatrix}=-\frac{1}{2}t^2\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{2t}.$$

积分,得

$$C_1(t)=t-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}(t^2+2t+2),$$

$$C_2(t)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^t(t^2-2t+2)+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2t}.$$

于是,方程组①的特解为

$$\begin{cases}\widetilde{x}=\left(t+\dfrac{1}{2}\right)\mathrm{e}^t-t^2-2, \\ \widetilde{y}=\left(t-\dfrac{1}{2}\right)\mathrm{e}^t-2t.\end{cases}$$

得齐次方程组①的通解为

$$\begin{cases} x=C_1\mathrm{e}^t+C_2\mathrm{e}^{-t}+\left(t+\dfrac{1}{2}\right)\mathrm{e}^t-t^2-2, \\ y=C_1\mathrm{e}^t-C_2\mathrm{e}^{-t}+\left(t-\dfrac{1}{2}\right)\mathrm{e}^t-2t. \end{cases}$$

（2）用消元法，求得对应齐次方程组的通解为

$$C_1\begin{pmatrix} 5\cos t \\ 2\cos t+\sin t \end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix} 5\sin t \\ -\cos t+2\sin t \end{pmatrix}. \qquad ①$$

设原方程组的特解为

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}=C_1(t)\begin{pmatrix} 5\cos t \\ 2\cos t+\sin t \end{pmatrix}+C_2(t)\begin{pmatrix} 5\sin t \\ -\cos t+2\sin t \end{pmatrix}, \qquad ②$$

将式②代入原方程，得

$$5\cos t\cdot C_1'(t)+5\cos t\cdot C_2'(t)=\csc t,$$

$$(2\cos t+\sin t)C_1'(t)+(-\cos t+2\sin t)C_2'(t)=\sec t,$$

解得
$$C_1'(t)=\frac{1}{5}(\cot t+5\tan t-2),$$

$$C_2'(t)=\frac{1}{5}(2\cot t-4).$$

积分，得
$$C_1(t)=\frac{1}{5}(\ln|\sin t|-5\ln|\cos t|-2t),$$

$$C_2(t)=\frac{1}{5}(2\ln|\sin t|-4t).$$

于是，原非齐次方程组特解为

$$\begin{cases} \tilde{x}=(\ln|\sin t|-5\ln|\cos t|-2t)\cos t+2(\ln|\sin t|-4t)\sin t, \\ \tilde{y}=\dfrac{1}{5}(\ln|\sin t|-5\ln|\cos t|-2t)(2\cos t+\sin t) \\ \qquad +\dfrac{1}{5}(2\ln|\sin t|-4t)(-\cos t+2\sin t). \end{cases} \qquad ③$$

则由式①与式③组合即得原非齐次方程组通解.

例 2 设 $\boldsymbol{X}_1(t),\boldsymbol{X}_2(t),\cdots,\boldsymbol{X}_{n+1}(t)$ 是方程组

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{X}+\boldsymbol{F}(t) \qquad ①$$

的$n+1$个线性无关解，其中$\boldsymbol{F}(t)\neq\boldsymbol{0}$. 求证方程组①的任何解$\boldsymbol{X}(t)$恒可表示为

$$\boldsymbol{X}(t)=a_1\boldsymbol{X}_1(t)+a_2\boldsymbol{X}_2(t)+\cdots+a_{n+1}\boldsymbol{X}_{n+1}(t), \qquad ②$$

其中$a_1,a_2,\cdots,a_{n+1}$为满足关系式

$$a_1+a_2+\cdots+a_{n+1}=1$$

的某些常数. 反之，满足式③的函数$\boldsymbol{X}(t)$也是方程组①的解.

证 本例要说明这样一个事实：线性齐次方程组的线性无关解的最大个数是n，而非齐次方程组线性无关解的最大个数是$n+1$.

设 $\widetilde{\boldsymbol{X}}_1(t)=\boldsymbol{X}_1(t)-\boldsymbol{X}_{n+1}(t),\widetilde{\boldsymbol{X}}_2(t)=\boldsymbol{X}_2(t)-\boldsymbol{X}_{n+1}(t),$

$$\cdots,\widetilde{\boldsymbol{X}}_n(t)=\boldsymbol{X}_n(t)-\boldsymbol{X}_{n+1}(t), \qquad ②$$

可以验证$\widetilde{\boldsymbol{X}}_i(t)(i=1,2,\cdots,n)$是方程组$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{X}+\boldsymbol{F}(t)$的对应齐次方程组的解，且是线性无关解，所以是基本解组(可以用反证法证明线性无关组).

对$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{X}+\boldsymbol{F}(t)$的任一解$\boldsymbol{X}(t)$，$\boldsymbol{X}(t)-\boldsymbol{X}_{n+1}(t)$一定是$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{X}$的解. 因为式②是$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}t}$的基本解组，故必存在一组数$a_1,a_2,\cdots,a_n$，使

$$\boldsymbol{X}(t)-\boldsymbol{X}_{n+1}(t)=a_1\widetilde{\boldsymbol{X}}_1(t)+a_2\widetilde{\boldsymbol{X}}_2(t)+\cdots+a_n\widetilde{\boldsymbol{X}}_n(t),$$

即 $$\boldsymbol{X}(t)=a_1\widetilde{\boldsymbol{X}}_1(t)+a_2\widetilde{\boldsymbol{X}}_2(t)+\cdots+a_n\widetilde{\boldsymbol{X}}_n(t)+\boldsymbol{X}_{n+1}(t),$$

则 $$\boldsymbol{X}(t)=a_1\boldsymbol{X}_1(t)+a_2\boldsymbol{X}_2(t)+\cdots+a_n\boldsymbol{X}_n(t)+(1-a_1-a_2-\cdots-a_n)\boldsymbol{X}_{n+1}(t).$$

令 $$a_{n+1}=1-a_1-a_2-\cdots-a_n,$$

即得 $$\boldsymbol{X}(t)=a_1\boldsymbol{X}_1(t)+a_2\boldsymbol{X}_2(t)+\cdots+a_{n+1}\boldsymbol{X}_{n+1}(t).$$

后半部分，可用类似方法求证. 请读者一试.

例3 设$X=X_i(t)(i=1,2,\cdots,m)$是$\frac{dX}{dt}=A(t)X+f_i(t)(i=1,2,\cdots,m)$的解，证明：$X=\sum_{i=1}^{m}X_i$必为$\frac{dX}{dt}=A(t)X+\sum_{i=1}^{m}f_i(t)$的解.

证 因为$X=X_i(t)$为$\frac{dX}{dt}=A(t)X+f_i(t)(i=1,2,\cdots,m)$的解，所以

$$\frac{dX_i(t)}{dt}=A(t)X_i(t)+f_i(t)\quad(i=1,2,\cdots,m).$$

将它们逐个相加，得

$$\frac{d\sum_{i=1}^{m}X_i(t)}{dt}=A(t)\left(\sum_{i=1}^{m}X_i(t)\right)+\sum_{i=1}^{m}f_i(t),$$

所以$\sum_{i=1}^{m}X_i(t)$是$\frac{dX}{dt}=A(t)X+\sum_{i=1}^{m}f_i(t)$的解.

例4 设有线性非齐次方程组

$$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=\frac{1}{t}x-y+t,\\ \frac{dy}{dt}=\frac{1}{t^2}x+\frac{2}{t}y-t^2.\end{cases}\qquad ①$$

(1) 验证$x=t^2,y=-t$是对应齐次方程组的解；

(2) 求所给非齐次方程组的解.

解 (1) 将$x=t^2,y=-t$代入方程组，即可验证$x=t^2,y=-t$确是对应齐次方程组的解.

(2) 将$x^2=t^2(1-\ln t),y^2=t\ln t$代入方程组①的对应齐次方程组，知等式成立.

当$t=1$时，$\begin{vmatrix}t^2 & t^2(1-\ln t)\\ -t & t\ln t\end{vmatrix}\neq0$，知原方程组①的一个基本解矩阵为

$$\begin{pmatrix}t^2 & t^2(1-\ln t)\\ -t & t\ln t\end{pmatrix}.$$

所以，原方程组的一个特解(由主要内容中式⑤求得)为

$$\begin{pmatrix}\tilde{x}\\ \tilde{y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{t^2}{2}\ln t-\dfrac{t^2}{2}\ln^2 t+\dfrac{t^4}{4}-\dfrac{t^2}{4}\\ \dfrac{t}{2}\ln t-\dfrac{3}{4}t^3+\dfrac{3}{4}t+\dfrac{t}{2}\ln^2 t\end{pmatrix},$$

所以，原方程组①的通解为

$$\begin{cases}x=C_1t^2+C_2t^2(1-\ln t)+\dfrac{t^2}{2}\ln t-\dfrac{t^2}{2}\ln^2 t+\dfrac{t^4}{4}-\dfrac{t^2}{4},\\ y=-C_1t+C_2t\ln t+\dfrac{t}{2}\ln t-\dfrac{3}{4}t^3+\dfrac{3}{4}t+\dfrac{t}{2}\ln^2 t.\end{cases}$$

例5 设$\boldsymbol{X}(t)$是非齐次方程组$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{X}+\boldsymbol{F}(t)$的复值解，这里$\boldsymbol{A}(t)$与$\boldsymbol{F}(t)$都是实的. 证明：$\boldsymbol{X}(t)$的实部和其复数共轭也是非齐次方程组的解，而$\boldsymbol{X}(t)$的虚部是对应齐次方程组的解.

证 设复值解$\boldsymbol{X}(t)=\boldsymbol{U}(t)+\mathrm{i}\boldsymbol{V}(t)$，其中$\boldsymbol{U}(t)$，$\boldsymbol{V}(t)$是实值函数，则

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}(t)}{\mathrm{d}t}&=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{U}(t)}{\mathrm{d}t}+\mathrm{i}\,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}(t)}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}(t)(\boldsymbol{U}(t)+\mathrm{i}\boldsymbol{V}(t))+\boldsymbol{F}(t)\\&=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{U}(t)+\mathrm{i}\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{V}(t)+\boldsymbol{F}(t).\end{aligned}$$

比较其实部与虚部，可得

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{U}(t)}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{U}(t)+\boldsymbol{F}(t),\quad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}(t)}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{V}(t),$$

所以，$\boldsymbol{U}(t)$是非齐次方程组的解，$\boldsymbol{V}(t)$是对应齐次方程组的解.

由上面的证明可知

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}(\boldsymbol{U}(t)-\mathrm{i}\boldsymbol{V}(t))}{\mathrm{d}t}&=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{U}(t)}{\mathrm{d}t}-\mathrm{i}\,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}(t)}{\mathrm{d}t}\\&=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{U}(t)+\boldsymbol{F}(t)-\mathrm{i}\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{V}(t)\\&=\boldsymbol{A}(t)(\boldsymbol{U}(t)-\mathrm{i}\boldsymbol{V}(t))+\boldsymbol{F}(t),\end{aligned}$$

所以$\boldsymbol{X}(t)$的复数共轭$\boldsymbol{U}(t)-\mathrm{i}\boldsymbol{V}(t)$也是非齐次方程组的解.

例6 设$a_{ij}(t)$ $(i,j=1,2,3)$在$-\infty<t<+\infty$上连续，方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=a_{11}(t)x_1+a_{12}(t)x_2+a_{13}(t)x_3,\\ \dfrac{dx_2}{dt}=a_{21}(t)x_1+a_{22}(t)x_2+a_{23}(t)x_3,\\ \dfrac{dx_3}{dt}=a_{31}(t)x_1+a_{32}(t)x_2+a_{33}(t)x_3+t\end{cases} \tag{①}$$

所对应的齐次方程组的一个基本解组为

$$\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1\\1+t\\t\end{pmatrix}e^t,\quad \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}e^t.$$

求非齐次方程组①的通解及满足初始条件 $x_1(0)=x_2(0)=x_3(0)$ 的特解.

解 用常数变易法求解. 设方程组①的解为

$$\boldsymbol{x}(t)=C_1(t)\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}+C_2(t)\begin{pmatrix}1\\1+t\\t\end{pmatrix}e^t+C_3(t)\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}e^t,$$

代入方程组①,求得

$$C_1'(t)\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}+C_2'(t)\begin{pmatrix}1\\1+t\\t\end{pmatrix}e^t+C_3'(t)\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}e^t,$$

解得 $C_1'(t)=t,\quad C_2'(t)=-te^{-t},\quad C_3'(t)=(t^2+2t)e^{-t},$

所以
$$\begin{cases}C_1(t)=\dfrac{1}{2}t^2+C_1,\\ C_2(t)=(t+1)e^{-t}+C_2,\\ C_3(t)=-(t^2+4t+4)e^{-t}+C_3.\end{cases}$$

故,经整理得

$$\boldsymbol{x}(t)=\frac{1}{2}t^2\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}+(t+1)\begin{pmatrix}1\\1+t\\t\end{pmatrix}-(t^2+4t+4)\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+C_1\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$$
$$+C_2\begin{pmatrix}1\\1+t\\t\end{pmatrix}e^t+C_3\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}e^t$$

或
$$\begin{cases}x_1(t)=C_1+C_2e^t+\dfrac{1}{2}t^2+t+1,\\ x_2(t)=-C_1+C_2(1+t)e^t+C_3e^t-\dfrac{1}{2}t^2-2t-3,\\ x_3(t)=-C_1+C_2te^t+C_3e^t-\dfrac{1}{2}t^2-3t-4,\end{cases}$$

从而,满足初始条件 $x_1(0)=x_2(0)=x_3(0)$ 的特解为

$$\begin{cases}x_1(t)=-e^t+\dfrac{1}{2}t^2+t+1,\\ x_2(t)=(3-t)e^t-\dfrac{1}{2}t^2-2t-3,\\ x_3(t)=(-t+4)e^t-\dfrac{1}{2}t^2-3t-4.\end{cases}$$

例 7 求方程组 $\boldsymbol{X}'=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\boldsymbol{X}+\begin{pmatrix}e^{2t}\\ 0\end{pmatrix}$ 的通解.

解 $\boldsymbol{\Phi}(t)=\begin{pmatrix}e^t & e^{3t}\\ -e^t & e^{3t}\end{pmatrix}$ 是对应齐次方程组的基解矩阵,其逆矩阵为

$$\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}e^{-t} & -e^{-t}\\ e^{-3t} & e^{-3t}\end{pmatrix}.$$

则方程组的特解为

$$\boldsymbol{X}(t)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}e^t & e^{3t}\\ -e^t & e^{3t}\end{pmatrix}\int_{x_0}^{x}\begin{pmatrix}e^{-\tau} & -e^{-\tau}\\ e^{-3\tau} & e^{-3\tau}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{2\tau}\\ 0\end{pmatrix}d\tau$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}e^{3t}-e^t\\ e^{3t}-2e^{2t}+e^t\end{pmatrix}.$$

所以,原方程组通解为

$$\boldsymbol{X}(t)=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^t & e^{3t}\\ -e^t & e^{3t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_1\\ C_2\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}e^{3t}-e^t\\ e^{3t}-2e^{2t}+e^t\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}C_1e^t+C_2e^{3t}+\dfrac{1}{2}(e^{3t}-e^t)\\ -C_1e^t+C_2e^{3t}+\dfrac{1}{2}(e^{3t}-2e^{2t}+e^t)\end{pmatrix}.$$

第四节　常系数线性微分方程组的解法

主 要 内 容

1. 对于常系数线性齐次方程组$\frac{dY}{dx}=AY$，存在非奇异线性变换$Y=TZ$，使方程变为

$$\frac{dZ}{dx}=T^{-1}ATZ,$$

其中，$T=(t_{ij})(i,j=1,2,\cdots,n)$，$\det T\neq 0$，$T^{-1}AT$ 是**约当**(Jordan)**标准形**.

约当标准形$T^{-1}AT$ 与矩阵A 的特征方程$\det(A-\lambda E)=0$ 的特征根有关.

(1) 矩阵A 的特征根是单根的情形.

结论1　如果常系数线性齐次方程组$\frac{dY}{dx}=AY$ 的系数矩阵A 有 n 个互异的特征根 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，而$T_1,T_2,\cdots,T_n$ 为各根所对应的特征向量，则

$$Y_1(x)=e^{\lambda_1 x}T_1,\quad Y_2(x)=e^{\lambda_2 x}T_2,\quad \cdots,\quad Y_n(x)=e^{\lambda_n x}T_n$$

为$\frac{dY}{dx}=AY$ 的一个基本解组，其中$T_i(i=1,2,\cdots,n)$可以通过求解方程组$AT_i=\lambda_i T_i(i=1,2,\cdots,n)$得到.

定理 4.11　如果实系数线性齐次方程组$\frac{dY}{dx}=A(x)Y$ 有复值解$Y(x)=U(x)+iV(x)$，则其实部和虚部

$$U(x)=\begin{pmatrix}u_1(x)\\u_2(x)\\\vdots\\u_n(x)\end{pmatrix},\quad V(x)=\begin{pmatrix}v_1(x)\\v_2(x)\\\vdots\\v_n(x)\end{pmatrix}\qquad ①$$

都是齐次方程组$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Y}}{\mathrm{d}x}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}$的解.

实矩阵$\boldsymbol{A}$的复特征根一定成对地出现. 这时,方程组$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Y}}{\mathrm{d}x}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}$对应于$\lambda$的复解的形式是

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}=\mathrm{e}^{ax}\begin{pmatrix} r_{11}\cos bx-r_{12}\sin bx \\ r_{21}\cos bx-r_{22}\sin bx \\ \vdots \\ r_{n1}\cos bx-r_{n2}\sin bx \end{pmatrix}+\mathrm{i}\mathrm{e}^{ax}\begin{pmatrix} r_{12}\cos bx+r_{11}\sin bx \\ r_{22}\cos bx+r_{21}\sin bx \\ \vdots \\ r_{n2}\cos bx+r_{n1}\sin bx \end{pmatrix}, \quad ②$$

所以,如果在基本解组中有复值解,一定共轭成对出现,且可用形如式②的实部与虚部那样的实解来代替. 最后得到的n个解仍组成基本解组.

(2) 矩阵$\boldsymbol{A}$的特征根有重根的情形.

此时,非奇异变换$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{T}\boldsymbol{Z}$将方程组$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Y}}{\mathrm{d}x}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}$化为$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Z}}{\mathrm{d}x}=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}\boldsymbol{Z}$. 其中

$$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & & & \\ & \boldsymbol{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_m \end{pmatrix},$$

而
$$\boldsymbol{A}_i=\begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix} \quad (i=1,2,\cdots,m)$$

是k_i阶的约当块,$k_1+k_2+\cdots+k_m=n$,$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$是$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Y}}{\mathrm{d}x}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}$的特征根,其中可能有的彼此相等.

结论 2 如果λ_i是矩阵$\boldsymbol{A}$的k_i重特征根,则$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Y}}{\mathrm{d}x}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}$存在$k_i$个形如

$$y_{1j}=p_{1j}(x)\mathrm{e}^{\lambda_i x}, \quad y_{2j}=p_{2j}(x)\mathrm{e}^{\lambda_i x}, \quad \cdots, \quad y_{nj}=p_{nj}(x)\mathrm{e}^{\lambda_i x} \quad (j=1,2,\cdots,k_i) \quad ③$$

的线性无关解，其中 $p_{rj}(x)(r=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,k_i)$ 为 x 的次数不高于 k_i-1 的多项式，取遍所有的 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,s)$，就得到 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Y}}{\mathrm{d}x}=\boldsymbol{AY}$ 的一个基本解组.

2. 常系数线性齐次方程组的基本解组的一个重要性质.

定理 4.12 如果方程 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Y}}{\mathrm{d}x}=\boldsymbol{AY}$ 的特征根都具有负实部，则它的所有解当 $x\to+\infty$ 时，都趋于它的零解；如果 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Y}}{\mathrm{d}x}=\boldsymbol{AY}$ 至少有一个具有正实部的特征根，则不可能使得它的所有解当 $x\to+\infty$ 时，都趋于它的零解.

3. 常系数线性非齐次方程组 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Y}}{\mathrm{d}x}=\boldsymbol{AY}+\boldsymbol{F}(x)$ 通解的求法是：用1，2中代数方法求得 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Y}}{\mathrm{d}x}=\boldsymbol{AY}$ 的通解，再由常数变易法求得 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Y}}{\mathrm{d}x}=\boldsymbol{AY}+\boldsymbol{F}(x)$ 的一个特解，组合即得.

疑难解析

1. 对于主要内容中结论 2 中的 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Y}}{\mathrm{d}x}=\boldsymbol{AY}$ 的基本解组，具体怎样来确定？

答 先将主要内容中式③写成向量形式 $\boldsymbol{Y}(x)=P_i(x)\mathrm{e}^{\lambda_i x}$，再代入 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Y}}{\mathrm{d}x}=\boldsymbol{AY}$，得恒等式

$$P_i'(x)\mathrm{e}^{\lambda_i x}+P_i(x)\lambda_i\mathrm{e}^{\lambda_i x}\equiv\boldsymbol{A}P_i(x)\mathrm{e}^{\lambda_i x},$$

化简得

$$(\boldsymbol{A}-\lambda_i\boldsymbol{E})P_i(x)=P_i'(x).$$

由此得到关于 $p_{rj}(x)$ 的待定系数的 nk_i 个等式，所有 nk_i 个系数可以通过其中 k_i 个表达，不妨设为 $C_1,C_2,\cdots,C_{k_i}$，依次令

$$C_1=1,\ C_2=0,\ \cdots,\ C_{k_i}=0,$$
$$C_1=0,\ C_2=1,\ C_3=0,\ \cdots,\ C_{k_i}=0,$$
$$\cdots$$

$$C_1=0,\ C_2=0,\ \cdots,\ C_{k_i-1}=0,\ C_{k_i}=1,$$

就可得到$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Y}}{\mathrm{d}x}=\boldsymbol{AY}$的$k_i$个线性无关解.

取遍所有的$\lambda_i(i=1,2,\cdots,s)$,即得$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Y}}{\mathrm{d}x}=\boldsymbol{AY}$的$k_1+k_2+\cdots+k_s=n$个线性无关解,构成$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Y}}{\mathrm{d}x}=\boldsymbol{AY}$的一个基本解组.

2. 怎样理解定理:如果λ_j是矩阵$\boldsymbol{A}$的$k=m_j$重特征根,则方程组$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Y}}{\mathrm{d}x}=\boldsymbol{AY}$有如下形式的非零解

$$\boldsymbol{Y}(x)=(\boldsymbol{R}_0+\boldsymbol{R}_1x+\cdots+\boldsymbol{R}_{k-1}x^{k-1})\mathrm{e}^{\lambda_jx},$$

其中$\boldsymbol{R}_0$是非零列向量,$\boldsymbol{R}_0,\boldsymbol{R}_1,\cdots,\boldsymbol{R}_{k-1}$满足矩阵方程

$$\begin{cases}\boldsymbol{AR}_0=\lambda_j\boldsymbol{R}_0+\boldsymbol{R}_1,\\ \boldsymbol{AR}_1=\lambda_j\boldsymbol{R}_1+2\boldsymbol{R}_2,\\ \quad\vdots\\ \boldsymbol{AR}_{k-2}=\lambda_j\boldsymbol{R}_{k-2}+(k-1)\boldsymbol{R}_{k-1},\\ \boldsymbol{AR}_{k-1}=\lambda_j\boldsymbol{R}_{k-1}.\end{cases}$$

答 这个定理与结论2的作用是一样的,利用它可以求得λ_j所对应的k个线性无关解.

但是,要注意以下几点:

(1) $\boldsymbol{R}_0$必须是非零向量. 若$\boldsymbol{R}_0=\boldsymbol{0}$,则$\boldsymbol{Y}(0)=\boldsymbol{R}_0\equiv\boldsymbol{0}$,由解的存在唯一性定理知,$\boldsymbol{Y}(x)\equiv\boldsymbol{0}$,与$\boldsymbol{Y}(x)$是非零解矛盾.

(2) $\boldsymbol{R}_0,\boldsymbol{R}_1,\cdots,\boldsymbol{R}_{k-1}$共有$nk$个分量,其中有$k$个分量是自由的,其余$(n-1)k$个分量可由这$k$个分量表示出来. 只需给这$k$个自由分量以$k$组不同的值(如疑难解析1中$C_1,C_2,\cdots,C_{k_i}$的取法),且使$\boldsymbol{R}_0$是非零向量,即可得$k$个线性无关解. 用它们的朗斯基行列式可以验证其线性无关性.

(3) 当$\lambda_j=a+\mathrm{i}b$是b重复特征根时,$\bar{\lambda}_j=a-\mathrm{i}b$也是$k$重特征根.

3. 怎样利用线性代数方法求解常系数线性方程组?

答 常系数线性方程组的解可以比较容易地用线性代数方法

求得. 首先，回顾已知矩阵A，求A的特征值和求A的属于特征值λ_i的特征向量的步骤.

(1) 写出A的特征方程

$$\det(\lambda E-A)=0 \quad (或\det(A-\lambda E)=0),$$

由特征方程解出A的特征值.

(2) 将特征值λ_i代入$A-\lambda_i E$，对$A-\lambda_i E$进行初等行变换，求出A的属于λ_i的特征向量. 从而求出A的所有特征值的特征向量.

讨论特征向量的不同情形. 当全部特征值均为单重时，A有n个线性无关的特征向量$r_1,r_2,\cdots,r_n$，则$X(t)=(r_1e^{\lambda_1 t},r_2e^{\lambda_2 t},\cdots,r_ne^{\lambda_n t})$就是方程组的一个基解矩阵；当$A$有重特征值，但重特征值对应的特征向量个数与重数相同时，A有n个线性无关的特征向量$r_1,r_2,\cdots,r_n$，基解矩阵仍可依特征值均为单重时的方法得到；当重特征值对应的特征向量个数少于重数时，可用

$$X(t)=e^{\lambda_i t}\left(r_0+\frac{t}{1!}r_1+\frac{t^2}{2!}r_2+\cdots+\frac{t^{n-1}}{(n_i-1)!}r_{n_i-1}\right)$$

求出特征值λ_i(n_i重)的n_i个线性无关的特征向量. 其中r_0是齐次线性方程组$(A-\lambda_i E)^n r=0$(零向量)的非零解. 对于每一个解r_0，相应的$r_1,r_2,\cdots,r_{n_i-1}$由关系式$r_i=(A-\lambda_i E)r_{i-1}$确定.

A的n个线性无关的特征向量，必然构成常系数齐次线性方程组$\frac{dX}{dt}=AX$的一个基本解组.

对于常系数非齐次线性方程组$\frac{dX}{dt}=AX+F(t)$，则还需要求得其一个特解，即可依照其通解的构成求得通解.

方法、技巧与典型例题分析

本节要求熟悉矩阵A的特征方程、特征值及特征向量的概念，能够熟练地求矩阵A的特征值与特征向量. 清晰地了解在特征值

为单根或重根情形下线性方程组$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Y}}{\mathrm{d}x}=\boldsymbol{AY}$ 的基本解组的构成，能够求出方程组的n 个线性无关解与基本解组. 熟知方程组$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Y}}{\mathrm{d}x}=\boldsymbol{AY}+\boldsymbol{F}(x)$的通解的结构，能够求得方程组的通解，特别是熟练掌握用常数变易法求方程组$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Y}}{\mathrm{d}x}=\boldsymbol{AY}+\boldsymbol{F}(x)$的特解.

例 1 求解下列方程组：

$$(1)\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x,\\[2ex]\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=2y;\end{cases}\qquad\qquad(2)\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\alpha x+\beta y,\\[2ex]\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-\beta x+\alpha y.\end{cases}$$

解 (1) 方程组系数矩阵$\boldsymbol{A}$ 的特征方程是

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})=\begin{vmatrix}1-\lambda & 0\\ 0 & 2-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)(2-\lambda)=0,$$

解得特征值$\lambda_1=1,\lambda_2=2$.

对应于特征值$\lambda_1=1$ 的特征向量$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$满足

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},$$

解得$a=0,b=0$. 即对应$\lambda_1=1$ 的特征向量为$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$.

对应$\lambda_2=2$ 的特征向量$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$满足

$$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},$$

解得$a=0,b=1$. 即对应$\lambda_2=2$ 的特征向量为$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.

由此，得方程组的通解为

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=C_1\mathrm{e}^{t}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+C_2\mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},$$

其中，C_1, C_2 为任意常数. 从而，方程组的基解矩阵为

$$e^{At}=\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}.$$

读者应认真回顾高等代数中的有关知识.

(2) 方程组系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程为

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})=\begin{vmatrix} \alpha-\lambda & \beta \\ -\beta & \alpha-\lambda \end{vmatrix}=(\alpha-\lambda)^2+\beta^2=0,$$

解得特征值为 $\lambda_1=\alpha+\mathrm{i}\beta, \lambda_2=\alpha-\mathrm{i}\beta$.

因为相应于 $\lambda=\alpha+\mathrm{i}\beta$ 的特征向量 $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ 应满足

$$(\boldsymbol{A}-(\alpha+\mathrm{i}\beta)\boldsymbol{E})\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\mathrm{i}\beta & \beta \\ -\beta & -\mathrm{i}\beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=0,$$

即

$$\begin{cases} -\mathrm{i}\beta a+\beta b=0 \\ -\beta a-\mathrm{i}\beta b=0 \end{cases} \Rightarrow \quad b=\mathrm{i}a.$$

令 $a=1$，则 $b=\mathrm{i}$，则相应的特解为

$$e^{(\alpha+\mathrm{i}\beta)t}\begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}=e^{\alpha t}(\cos\beta t+\mathrm{i}\sin\beta t)\begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix},$$

从而，特征值 $\lambda_{1,2}=\alpha\pm\mathrm{i}\beta$ 对应的实解为

$$\begin{cases} x_1=e^{\alpha t}\cos\beta t, \\ y_1=-e^{\alpha t}\sin\beta t \end{cases} \quad 和 \quad \begin{cases} x_2=e^{\alpha t}\sin\beta t, \\ y_2=e^{\alpha t}\cos\beta t. \end{cases}$$

显然，这两个解线性无关，故方程组通解为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=C_1e^{\alpha t}\begin{pmatrix} \cos\beta t \\ -\sin\beta t \end{pmatrix}+C_2e^{\alpha t}\begin{pmatrix} \sin\beta t \\ \cos\beta t \end{pmatrix},$$

或

$$\begin{cases} x=e^{\alpha t}(C_1\cos\beta t+C_2\sin\beta t), \\ y=e^{\alpha t}(-C_1\sin\beta t+C_2\cos\beta t). \end{cases}$$

从本例可以看到，在求得矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程的特征值后，可以用待定系数法求方程组的特解，也可以用线性代数中求特征向量的方法求方程组的特解. 具体运用视实际情况确定.

例 2 求解下列方程组

(1) $\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=5y+4z, \\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=4y+5z;\end{cases}$　　(2) $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\begin{pmatrix}-1 & -1 \\ 2 & -3\end{pmatrix}x.$

解　(1) 系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程是

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})=\begin{vmatrix}5-\lambda & 4 \\ 4 & 5-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)(9-\lambda)=0,$$

解得特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=9$.

对应于 $\lambda_1=1$ 的特征向量 $\begin{pmatrix}a \\ b\end{pmatrix}$ 满足

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\begin{pmatrix}a \\ b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 4 \\ 4 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a \\ b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 \\ 0\end{pmatrix},$$

解得 $a=1,b=-1$. 即 $\lambda_1=1$ 对应特征向量为 $\begin{pmatrix}1 \\ -1\end{pmatrix}$.

对应于 $\lambda_2=9$ 的特征向量 $\begin{pmatrix}a \\ b\end{pmatrix}$ 满足

$$(\boldsymbol{A}-9\boldsymbol{E})\begin{pmatrix}a \\ b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & 4 \\ 4 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a \\ b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 \\ 0\end{pmatrix},$$

解得 $a=1,b=1$. 即 $\lambda_2=9$ 对应特征向量为 $\begin{pmatrix}1 \\ 1\end{pmatrix}$.

所以,方程组的通解为

$$\begin{pmatrix}y \\ z\end{pmatrix}=C_1\mathrm{e}^{x}\begin{pmatrix}1 \\ -1\end{pmatrix}+C_2\mathrm{e}^{9x}\begin{pmatrix}1 \\ 1\end{pmatrix}.$$

(2) 方程组系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程是

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})=\begin{vmatrix}-1-\lambda & -1 \\ 2 & -3-\lambda\end{vmatrix}$$
$$=[\lambda-(-2-\mathrm{i})][\lambda-(-2+\mathrm{i})]=0,$$

解得特征值为 $\lambda_1=-2-\mathrm{i},\lambda_2=-2+\mathrm{i}$.

当 $\lambda_2=-2+\mathrm{i}$ 时,对应的特征向量 $\begin{pmatrix}a \\ b\end{pmatrix}$ 满足

$$(\boldsymbol{A}+(2-\mathrm{i})\boldsymbol{E})\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-\mathrm{i} & -1\\2 & -1-\mathrm{i}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},$$

解得特征向量为$\begin{pmatrix}1\\1-\mathrm{i}\end{pmatrix}$,即对应复值解为

$$\mathrm{e}^{(-2+\mathrm{i})t}\begin{pmatrix}1\\1-\mathrm{i}\end{pmatrix}=\mathrm{e}^{-2t}(\cos t+\mathrm{i}\sin t)\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\mathrm{i}\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}\right\}$$

$$=\mathrm{e}^{-2t}\left\{\begin{pmatrix}\cos t\\\cos t+\sin t\end{pmatrix}+\mathrm{i}\begin{pmatrix}\sin t\\\sin t-\cos t\end{pmatrix}\right\},$$

故$\lambda=-2\pm\mathrm{i}$对应两个线性无关的实解为

$$\mathrm{e}^{-2t}\begin{pmatrix}\cos t\\\cos t+\sin t\end{pmatrix},\quad \mathrm{e}^{-2t}\begin{pmatrix}\sin t\\\sin t-\cos t\end{pmatrix},$$

从而,方程组通解为

$$\boldsymbol{X}(t)=\mathrm{e}^{-2t}\left\{C_1\begin{pmatrix}\cos t\\\cos t+\sin t\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}\sin t\\\sin t-\cos t\end{pmatrix}\right\}.$$

例3 求解下列方程组:

(1) $\begin{cases}\dot{x}=2x+y,\\\dot{y}=3x+4y;\end{cases}$ (2) $\begin{cases}\dot{x}=x+y,\\\dot{y}=3y-2x.\end{cases}$

解 (1) 方程组系数矩阵$\boldsymbol{A}$的特征方程为

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})=\begin{vmatrix}2-\lambda & 1\\3 & 4-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-5)=0,$$

解得特征值为$\lambda_1=1,\lambda_2=5$.

对应$\lambda_1=1$的特征向量$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$满足

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\3 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},$$

解得$a=1,b=-1$. 即对应$\lambda_1=1$的特征向量为$\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$.

对应$\lambda_2=5$的特征向量$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$满足

$$(\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{E})\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 1\\3 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},$$

解得 $b=3a$，可取 $a=1,b=3$. 即对应 $\lambda_2=5$ 的特征向量为 $\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$.
所以，方程组通解为

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=C_1\mathrm{e}^{t}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}+C_2\mathrm{e}^{5t}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}.$$

(2) 方程组系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程为

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})=\begin{vmatrix}1-\lambda & 1\\-2 & 3-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-4\lambda+5=0,$$

解得特征值为 $\lambda_1=2+\mathrm{i},\lambda_2=2-\mathrm{i}$.

对应 $\lambda_1=2+\mathrm{i}$ 的特征向量 $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ 满足

$$(\boldsymbol{A}-(2+\mathrm{i})\boldsymbol{E})\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1-\mathrm{i} & 1\\-2 & 1-\mathrm{i}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},$$

解得 $b=(1+\mathrm{i})a$，可取 $a=1,b=1+\mathrm{i}$，则对应的特解为

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\mathrm{e}^{(2+\mathrm{i})t}\begin{pmatrix}1\\1+\mathrm{i}\end{pmatrix}=\mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix}\cos t+\mathrm{i}\sin t\\(\cos t-\sin t)+\mathrm{i}(\cos t+\sin t)\end{pmatrix}.$$

从而，特征值 $\lambda_{1,2}=2\pm\mathrm{i}$ 对应的实解为

$$\begin{cases}x_1=\mathrm{e}^{2t}\cos t,\\y_1=\mathrm{e}^{2t}(\cos t-\sin t);\end{cases}\quad\begin{cases}x_2=\mathrm{e}^{2t}\sin t,\\y_2=\mathrm{e}^{2t}(\cos t+\sin t).\end{cases}$$

显然，它们线性无关. 从而，方程组通解为

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=C_1\mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix}\cos t\\\cos t-\sin t\end{pmatrix}+C_2\mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix}\sin t\\\cos t+\sin t\end{pmatrix}.$$

例 4 求解下列方程组:

$$(1)\begin{cases}\dot{x}=x-2y-z,\\\dot{y}=y-x+z,\\\dot{z}=x-z;\end{cases}\qquad(2)\begin{cases}\dot{x}=2x-y+z,\\\dot{y}=x+2y-z,\\\dot{z}=x-2y+2z.\end{cases}$$

解 (1) 方程组系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程为

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})=\begin{vmatrix}1-\lambda & -2 & -1\\ -1 & 1-\lambda & 1\\ 1 & 0 & -1-\lambda\end{vmatrix}=\lambda(\lambda+1)(2-\lambda)=0.$$

解得特征值为$\lambda_1=0,\lambda_2=-1,\lambda_3=2$.

对于$\lambda_1=0$的特征向量$(a,b,c)^{\mathrm{T}}$满足

$$(\boldsymbol{A}-0\boldsymbol{E})\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -2 & -1\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix},$$

解得$a=c,b=0$,可取对应$\lambda_1=0$的特征向量为$(1,0,1)^{\mathrm{T}}$.

类似可求得对应$\lambda_2=-1$的特征向量可取为$(0,1,-2)^{\mathrm{T}}$,对应$\lambda_3=2$的特征向量为$(3,-2,1)^{\mathrm{T}}$.

所以,原方程组通解为

$$\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=C_1\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}+C_2\mathrm{e}^{-t}\begin{pmatrix}0\\ 1\\ -2\end{pmatrix}+C_3\mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix}3\\ -2\\ 1\end{pmatrix}.$$

(2) 方程组系数矩阵$\boldsymbol{A}$的特征方程为

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})=\begin{vmatrix}2-\lambda & -1 & 1\\ 1 & 2-\lambda & -1\\ 1 & -1 & 2-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda)=0.$$

解得特征值为$\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=3$.

对应$\lambda_1=1$的特征向量$(a,b,c)^{\mathrm{T}}$满足

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix},$$

解得$a=0,b=c$,故可取$\lambda_1=1$对应的特征向量为$(0,1,1)^{\mathrm{T}}$.

类似可得$\lambda_2=2$对应的特征向量为$(1,1,1)^{\mathrm{T}}$,$\lambda_3=3$对应的特征向量为$(1,0,1)^{\mathrm{T}}$.

所以,方程组的通解为

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=C_1e^t\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+C_2e^{2t}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+C_3e^{3t}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},$$

或
$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & e^{2t} & e^{3t}\\e^t & e^{2t} & 0\\e^t & e^{2t} & e^{3t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_1\\C_2\\C_3\end{pmatrix}.$$

例5 求解下列方程组：

(1) $\begin{cases}2\dot{x}-5\dot{y}=4y-x,\\3\dot{y}-4\dot{y}=2x-y;\end{cases}$ (2) $\begin{cases}\dot{x}+\dot{y}=y+z,\\\dot{y}+\dot{z}=z+x,\\\dot{z}+\dot{x}=x+y.\end{cases}$

解 (1) 将方程组改写为

$$\begin{cases}\dot{x}=2x-3y,\\\dot{y}=x-2y.\end{cases}$$

方程组系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程为

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})=\begin{vmatrix}2-\lambda & -3\\1 & -2-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda+1)=0,$$

解得特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=-1$.

对应 $\lambda_1=1$ 的特征向量 $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ 满足

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -3\\1 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},$$

解得 $a=3b$. 故可取 $\lambda_1=1$ 对应的特征向量为 $\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$.

类似可求得 $\lambda_2=-1$ 对应的特征向量为 $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

所以，方程组的通解为

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=C_1e^t\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}+C_2e^{-t}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}.$$

(2) 将三个方程相加，得

$$\dot{x}+\dot{y}+\dot{z}=x+y+z. \qquad ①$$

式①分别减去方程组中第一、二、三个方程，得到一个新方程组

$$\begin{cases}\dot{x}=y,\\ \dot{y}=z,\\ \dot{z}=x.\end{cases} \qquad ②$$

两个方程组同解，故只需求解方程组②.

方程组②系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程为

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})=\begin{vmatrix}-\lambda & 1 & 0\\ 0 & -\lambda & 1\\ 1 & 0 & -\lambda\end{vmatrix}=1-\lambda^3=0,$$

解得特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i},\lambda_3=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$.

对应 $\lambda_1=1$ 的特征向量 $(a,b,c)^{\mathrm{T}}$ 满足

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix},$$

解得 $a=b=c$，可取 $\lambda_1=1$ 对应的特征向量为 $(1,1,1)^{\mathrm{T}}$.

相应于 $\lambda_2=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$，方程组有形如

$$\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\mathrm{e}^{\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)}\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}$$

的解，$(a,b,c)^{\mathrm{T}}$ 应满足

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i} & 1 & 0\\ 0 & \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i} & 1\\ 1 & 0 & \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix},$$

解得 $b=\frac{1}{2}(-1+\sqrt{3}\mathrm{i})a,c=-\frac{1}{2}(1+\sqrt{3}\mathrm{i})$，即可取

$$(a,b,c)^{\mathrm{T}}=\left(1,-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i},-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)^{\mathrm{T}},$$

相应的复值解为

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\mathrm{e}^{\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)t}\begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\\-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\end{pmatrix}$$

$$=\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\begin{pmatrix}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+\mathrm{i}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\\-\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+\sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)-\frac{\mathrm{i}}{2}\left(\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t-\sqrt{3}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\\-\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t-\sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)-\frac{\mathrm{i}}{2}\left(\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t+\sqrt{3}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\end{pmatrix}.$$

从而，$\lambda_{2,3}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ 对应的两个实解为

$$\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\begin{pmatrix}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t\\-\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+\sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\\-\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t-\sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\end{pmatrix},$$

$$\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\begin{pmatrix}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\\-\frac{1}{2}\left(\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t-\sqrt{3}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\\-\frac{1}{2}\left(\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t+\sqrt{3}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\end{pmatrix}.$$

显然它们线性无关.

所以，原方程组的通解为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-\frac{t}{2}} \begin{pmatrix} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t \\ -\frac{1}{2}\left(\cos \frac{\sqrt{3}}{2} t + \sqrt{3} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t \right) \\ -\frac{1}{2}\left(\cos \frac{\sqrt{3}}{2} t - \sqrt{3} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t \right) \end{pmatrix}$$

$$+ C_3 e^{-\frac{t}{2}} \begin{pmatrix} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t \\ -\frac{1}{2}\left(\sin \frac{\sqrt{3}}{2} t - \sqrt{3} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t \right) \\ -\frac{1}{2}\left(\sin \frac{\sqrt{3}}{2} t + \sqrt{3} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t \right) \end{pmatrix}.$$

例6 求方程

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}$$

的全部解.

解 本例要直接求特征值与特征向量是困难的. 由于

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix},$$

因此,分量加起来等于零的任何向量$\boldsymbol{x}$ 都是$\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值0 的特征向量. 特别地,可取

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\-1\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\-1\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\-1\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

是$\boldsymbol{A}$的对应$\lambda=0$的四个线性无关的特征向量.

又$(1,2,3,4,5)^{\mathrm{T}}$是$\boldsymbol{A}$的对应于特征值$\lambda=15$的特征向量. 因为,由$\boldsymbol{Ax}=\lambda\boldsymbol{x}$可知

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\\5\end{pmatrix}=(1+2+3+4+5)\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\\5\end{pmatrix}=15\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\\5\end{pmatrix}.$$

显然,这五个特征向量线性无关. 所以,方程组的每一解具有形式

$$\boldsymbol{x}(t)=C_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\-1\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}+C_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}+C_4\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}+C_5\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\\5\end{pmatrix}\mathrm{e}^{15t}.$$

例7 求解下列方程组:

(1) $\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-5x-10y-20z,\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=5x+5y+10z,\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=2x+4y+9z;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x+y-z,\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-x+x+y,\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=x-y+z.\end{cases}$

解 (1) 方程组系数矩阵$\boldsymbol{A}$的特征方程为

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})=\begin{vmatrix}-5-\lambda & -10 & -20\\ 5 & 5-\lambda & 10\\ 2 & 4 & 9-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-5)(\lambda^2-4\lambda+5)$$

$$=0,$$

解得特征值为$\lambda_1=5,\lambda_2=2+\mathrm{i},\lambda_3=2-\mathrm{i}$.

对应$\lambda_1=5$的特征向量$(a,b,c)^{\mathrm{T}}$满足

$$(\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{E})\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10&-10&-20\\5&0&10\\2&4&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},$$

解得$a=-2c,b=0$,可取$\lambda_1=5$对应的特征向量为$(-2,0,1)^{\mathrm{T}}$.

对应$\lambda_2=2+\mathrm{i}$的特征向量(a,b,c)满足

$$(\boldsymbol{A}-(2+\mathrm{i})\boldsymbol{E})\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7-\mathrm{i}&-10&-20\\5&3-\mathrm{i}&10\\2&4&7-\mathrm{i}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},$$

解得$a=(1+\mathrm{i})b,c=-\frac{2}{5}(2+\mathrm{i})b$,可取$\lambda_2=2+\mathrm{i}$对应的特征向量为$(5+5\mathrm{i},5,-4-2\mathrm{i})$,得对应的复值解

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\mathrm{e}^{(2+\mathrm{i})t}\begin{pmatrix}5+5\mathrm{i}\\5\\-4-2\mathrm{i}\end{pmatrix}=\mathrm{e}^{2t}(\cos t+\mathrm{i}\sin t)\begin{pmatrix}5+5\mathrm{i}\\5\\-4-2\mathrm{i}\end{pmatrix}.$$

从而,$\lambda_{2,3}=2\pm\mathrm{i}$对应的两个实解为

$$\mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix}5(\cos t-\sin t)\\5\cos t\\-2(2\cos t-\sin t)\end{pmatrix},\quad \mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix}5(\cos t+\sin t)\\5\sin t\\-2(2\sin t+\cos t)\end{pmatrix}.$$

所以,方程组的通解为

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=C_1\mathrm{e}^{5t}\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}+C_2\mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix}5(\cos t-\sin t)\\5\cos t\\-2(2\cos t-\sin t)\end{pmatrix}$$
$$+C_3\mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix}5(\cos t+\sin t)\\5\sin t\\-2(2\sin t+\cos t)\end{pmatrix}.$$

(2) 方程组系数矩阵$\boldsymbol{A}$的特征方程为

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})=\begin{vmatrix}1-\lambda & 1 & -1\\ -1 & 1-\lambda & 1\\ 1 & -1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-1)(\lambda^2-2\lambda+4)=0,$$

解得特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=1+\sqrt{3}\,\mathrm{i},\lambda_3=1-\sqrt{3}\,\mathrm{i}$.

对应 $\lambda_1=1$ 的特征向量 $(a,b,c)^{\mathrm{T}}$ 满足

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&-1\\-1&0&1\\1&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},$$

解得 $a=b=c$，可取 $\lambda_1=1$ 对应的特征向量为 $(1,1,1)^{\mathrm{T}}$.

对应 $\lambda_2=1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}$ 的特征向量 $(a,b,c)^{\mathrm{T}}$ 满足

$$(\boldsymbol{A}-(1+\sqrt{3}\,\mathrm{i})\boldsymbol{E})\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\sqrt{3}\,\mathrm{i}&1&-1\\-1&-\sqrt{3}\,\mathrm{i}&1\\1&-1&-\sqrt{3}\,\mathrm{i}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},$$

解得 $a=\frac{1}{2}(-1+\sqrt{3}\,\mathrm{i})c,b=\frac{1}{2}(-1+\sqrt{3}\,\mathrm{i})$，可取 $\lambda_2=1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}$，对应的特征向量为 $(-1+\sqrt{3}\,\mathrm{i},-1-\sqrt{3}\,\mathrm{i},2)$. 故 $\lambda_2=1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}$，对应的复值解为

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\mathrm{e}^{(1+\sqrt{3}\,\mathrm{i})t}\begin{pmatrix}-1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}\\-1-\sqrt{3}\,\mathrm{i}\\2\end{pmatrix}$$
$$=\mathrm{e}^{t}\begin{pmatrix}(-\cos\sqrt{3}\,t-\sqrt{3}\sin\sqrt{3}\,t)+\mathrm{i}(\sqrt{3}\cos\sqrt{3}\,t-\sin\sqrt{3}\,t)\\(-\cos\sqrt{3}\,t+\sqrt{3}\sin\sqrt{3}\,t)+\mathrm{i}(-\sqrt{3}\cos\sqrt{3}\,t-\sin\sqrt{3}\,t)\\2\cos\sqrt{3}\,t+\mathrm{i}\sin\sqrt{3}\,t\end{pmatrix}.$$

从而，$\lambda_{2,3}=1\pm\sqrt{3}\,\mathrm{i}$ 对应的两个实解为

$$e^t\begin{pmatrix}-\cos\sqrt{3}t-\sqrt{3}\sin\sqrt{3}t\\-\cos\sqrt{3}t+\sqrt{3}\sin\sqrt{3}t\\2\cos\sqrt{3}t\end{pmatrix},$$

$$e^t\begin{pmatrix}\sqrt{3}\cos\sqrt{3}t-\sin\sqrt{3}t\\-\sqrt{3}\cos\sqrt{3}t-\sin\sqrt{3}t\\2\sin\sqrt{3}t\end{pmatrix}.$$

所以，方程组的通解为

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=C_1e^t\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+C_2e^t\begin{pmatrix}-\cos\sqrt{3}t-\sqrt{3}\sin\sqrt{3}t\\-\cos\sqrt{3}t+\sqrt{3}\sin\sqrt{3}t\\2\cos\sqrt{3}t\end{pmatrix}$$

$$+C_3e^t\begin{pmatrix}\sqrt{3}\cos\sqrt{3}t-\sin\sqrt{3}t\\-\sqrt{3}\cos\sqrt{3}t-\sin\sqrt{3}t\\2\sin\sqrt{3}t\end{pmatrix}.$$

例 8 求解初值问题：

(1) $\dfrac{d}{dt}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&8\\-1&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}x(0)\\y(0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\-2\end{pmatrix}$;

(2) $\dfrac{dx}{dt}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&1&1\end{pmatrix}x$, $x(0)=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

解 (1) 方程组系数矩阵 A 的特征方程为

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}3-\lambda&8\\-1&-3-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda+1)=0,$$

解得特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=-1$.

对应 $\lambda_1=1$ 的特征向量 $(a,b)^T$ 满足

$$(A-E)\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&8\\-1&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},$$

解得 $a=-4b$，故 $\lambda_1=1$ 对应的特征向量为 $\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}$.

类似可求得 $\lambda_2=-1$ 对应的特征向量为 $\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$.

所以，方程组的通解为

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4e^t & -2e^{-t}\\-e^t & e^{-t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_1\\C_2\end{pmatrix}.$$

代入初始条件 $x(0)=6, y_0=-2$，得

$$\begin{cases}4C_1-2C_2=6,\\-C_1+C_2=-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C_1=1,\\C_2=-1,\end{cases}$$

故方程组满足初始条件的特解为

$$\begin{cases}x=4e^t+2e^{-t},\\y=-e^t-e^{-t}.\end{cases}$$

(2) 方程组系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程为

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})=\begin{vmatrix}1-\lambda & 0 & 0\\0 & 1-\lambda & -1\\0 & 1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)(\lambda^2-2\lambda+2)=0,$$

解得特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=1+\mathrm{i},\lambda_3=1-\mathrm{i}$.

对应 $\lambda_1=1$ 的特征向量 $(a,b,c)^{\mathrm{T}}$ 满足

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},$$

解得 a 任意，$b=c=0$，可取 $\lambda_1=1$ 对应特征向量为 $(1,0,0)^{\mathrm{T}}$.

对应 $\lambda_2=1+\mathrm{i}$ 的特征向量 $(a,b,c)^{\mathrm{T}}$ 满足

$$(\boldsymbol{A}-(1+\mathrm{i})\boldsymbol{E})\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\mathrm{i}&0&0\\0&-\mathrm{i}&-1\\0&1&-\mathrm{i}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},$$

容易求得一个特征向量 $(0,\mathrm{i},1)^{\mathrm{T}}$.

从而可求得 $\lambda_2=1+\mathrm{i}$ 对应的复值解为

$$\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})t}\begin{pmatrix}0\\ \mathrm{i}\\ 1\end{pmatrix}=\mathrm{e}^t\begin{pmatrix}0\\ -\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}+\mathrm{i}\mathrm{e}^t\begin{pmatrix}0\\ \cos t\\ \sin t\end{pmatrix}.$$

故 $\lambda_{2,3}=1\pm\mathrm{i}$ 对应的两个实解为

$$\mathrm{e}^t\begin{pmatrix}0\\ -\sin t\\ \cos t\end{pmatrix},\quad \mathrm{e}^t\begin{pmatrix}0\\ \cos t\\ \sin t\end{pmatrix},$$

所以,原方程组通解为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(t)&=\mathrm{e}^t\left(C_1\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}0\\ -\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}+C_3\begin{pmatrix}0\\ \cos t\\ \sin t\end{pmatrix}\right)\\ &=\mathrm{e}^t\begin{pmatrix}C_1\\ -C_2\sin t+C_3\cos t\\ C_2\cos t+C_3\sin t\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

代入初值条件 $x(0)=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$,解得 $C_1=1,C_2=1,C_3=1$.

于是,所求初值问题的解为

$$\boldsymbol{x}(t)=\mathrm{e}^t\begin{pmatrix}1\\ \cos t-\sin t\\ \cos t+\sin t\end{pmatrix}.$$

例 9 用"化高阶方程法"求解下列方程组:

(1) $\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y,\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\dfrac{y^2}{x};\end{cases}$ (2) $\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{x}{z},\\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{x}{y}.\end{cases}$

解 "化高阶方程法"就是把方程组化为与之等价的高阶方程式,然后通过求高阶方程式的解来得出方程组的解. 化高阶方程法实际上就是保留一个未知函数,求出由这个未知函数表示的高阶

导数式，从中消去其他未知函数，就得到此未知函数的高阶方程，故也称之为消元法.

（1）微分第一式，得

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dy}{dt}.$$

代入第二式，得

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{y^2}{x}=\frac{1}{x}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2.$$

得到一个关于 x 的二阶方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{1}{x}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=0.$$

令 $\frac{dx}{dt}=u$，则 $\frac{d^2x}{dt^2}=u\frac{du}{dx}$，上式化为

$$u\frac{du}{dx}-\frac{1}{x}u^2=0 \Rightarrow \frac{du}{dx}-\frac{u}{x}=0. \qquad ①$$

解式①，得

$$u=C_1x \Rightarrow \frac{dx}{dt}=C_1x \Rightarrow x=C_2e^{C_1x},$$

于是

$$y=\frac{dx}{dt}=C_1C_2e^{C_1x}.$$

原方程组通解为

$$\begin{cases} x=C_2e^{C_1x}, \\ y=C_1C_2e^{C_1x}. \end{cases}$$

（2）微分第一式，得

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{z}+\frac{x}{z^2}\frac{dz}{dx},$$

代入第二式，得

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{z}-\frac{x}{z^2}\left(-\frac{x}{y}\right)=\frac{1}{z}+\frac{x^2}{yz^2},$$

得方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}+\frac{1}{y}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2,$$

即 $$yy''=\frac{1}{x}y'y+(y')^2 \quad ②$$

是关于 y,y',y'' 的齐次方程. 将变换 $y=e^{\int u\mathrm{d}x}$ 代入方程②,得

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{x}u,$$

分离变量后积分,得

$$u=Cx \Rightarrow y=C_2e^{C_1x^2} \Rightarrow z=\frac{1}{2C_1C_2}e^{-C_1x^2},$$

所以,原方程组的解为

$$y=C_2e^{C_1x^2}, \quad z=\frac{1}{2C_1C_2}e^{-C_1x^2}.$$

例 10 求解下列方程组:

(1) $\begin{cases} \ddot{x}=2y, \\ \ddot{y}=-2x; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=y, \\ \dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=x. \end{cases}$

解 (1) 令 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x_1, \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=y_1$,原方程化为

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x_1, \\ \dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}=2y, \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=y_1, \\ \dfrac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t}=-2x. \end{cases} \quad ①$$

方程组①的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程为

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})=\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ -2 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix}=\lambda^4+4=0,$$

解得特征值为$\lambda_{1,2}=1\pm\mathrm{i},\lambda_{3,4}=-1\pm\mathrm{i}$.

$\lambda_1=1+\mathrm{i}$ 对应的特征向量$(a,b,c,d)^{\mathrm{T}}$ 满足

$$\begin{pmatrix}-1-\mathrm{i} & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1-\mathrm{i} & 2 & 0\\ 0 & 0 & -1-\mathrm{i} & 1\\ -2 & 0 & 0 & -1-\mathrm{i}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}=0,$$

可取$a=1,b=1+\mathrm{i},c=\mathrm{i},d=-1+\mathrm{i}$,故有相应的复值解

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})t}\begin{pmatrix}1\\\mathrm{i}\end{pmatrix}=\mathrm{e}^t\begin{pmatrix}\cos t+\mathrm{i}\sin t\\-\sin t+\mathrm{i}\cos t\end{pmatrix},$$

即$\lambda_{1,2}=1\pm\mathrm{i}$ 对应两个实解

$$\mathrm{e}^t\begin{pmatrix}\cos t\\-\sin t\end{pmatrix},\quad \mathrm{e}^t\begin{pmatrix}\sin t\\\cos t\end{pmatrix}.$$

$\lambda_3=-1+\mathrm{i}$ 对应的特征向量$(a,b,c,d)^{\mathrm{T}}$ 满足

$$\begin{pmatrix}1-\mathrm{i} & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1-\mathrm{i} & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1-\mathrm{i} & 1\\ -2 & 0 & 0 & 1-\mathrm{i}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix},$$

可取$a=1,b=-1+\mathrm{i},c=-\mathrm{i},d=1+\mathrm{i}$. 故有相应的复值解

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\mathrm{e}^{(-1+\mathrm{i})t}\begin{pmatrix}1\\-\mathrm{i}\end{pmatrix}=\mathrm{e}^{-t}\begin{pmatrix}\cos t+\mathrm{i}\sin t\\\sin t-\mathrm{i}\cos t\end{pmatrix}.$$

即$\lambda_{3,4}=-1\pm\mathrm{i}$ 对应两个实解

$$\mathrm{e}^{-t}\begin{pmatrix}\cos t\\\sin t\end{pmatrix},\quad \mathrm{e}^{-t}\begin{pmatrix}\sin t\\-\cos t\end{pmatrix}.$$

显然,求得这四个实解是线性无关的. 故原方程组通解为

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\mathrm{e}^t\left(C_1\begin{pmatrix}\cos t\\-\sin t\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}\sin t\\\cos t\end{pmatrix}\right)+\mathrm{e}^{-t}\left(C_3\begin{pmatrix}\cos t\\\sin t\end{pmatrix}+C_4\begin{pmatrix}\sin t\\-\cos t\end{pmatrix}\right).$$

(2) 令$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x_1$,则$\dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=y$;令$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=y_1$,则$\dfrac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=x$. 所以方程组化为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x_1,\\ \dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}=y,\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=y_1,\\ \dfrac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t}=x.\end{cases} \qquad ②$$

方程组②的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程为

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})=\begin{vmatrix}-\lambda & 1 & 0 & 0\\ 0 & -\lambda & 1 & 0\\ 0 & 0 & -\lambda & 1\\ 1 & 0 & 0 & -\lambda\end{vmatrix}=(\lambda^2-1)(\lambda^2+1)=0,$$

解得特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=-1,\lambda_{3,4}=\pm\mathrm{i}$.

对应 $\lambda_1=1$ 的特征向量 $(a,b,c,d)^{\mathrm{T}}$ 满足

$$\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\\ d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix},$$

解得 $a=b=c=d$，可取对应特征向量为 $(1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$.

类似可求 $\lambda_2=-1$ 对应特征向量为 $(1,-1,1,-1)^{\mathrm{T}}$.

对应 $\lambda_3=\mathrm{i}$ 的特征向量 $(a,b,c,d)^{\mathrm{T}}$ 满足

$$\begin{pmatrix}-\mathrm{i} & 1 & 0 & 0\\ 0 & -\mathrm{i} & 1 & 0\\ 0 & 0 & -\mathrm{i} & 1\\ 1 & 0 & 0 & -\mathrm{i}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\\ d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix},$$

解得 $a=-c=\mathrm{i}d=-\mathrm{i}b$，可取 $\lambda_3=\mathrm{i}$ 的对应特征向量为 $(1,\mathrm{i},-1,-\mathrm{i})$. 相应的复值解为

$$e^{it}\begin{pmatrix}1\\ i\\ -1\\ -i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos t+i\sin t\\ -\sin t+i\cos t\\ -\cos t-i\sin t\\ \sin t-i\cos t\end{pmatrix}.$$

故 $\lambda_{3,4}=\pm i$ 对应两个实解为

$$\begin{pmatrix}\cos t\\ -\sin t\\ -\cos t\\ \sin t\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\sin t\\ \cos t\\ -\sin t\\ -\cos t\end{pmatrix}.$$

显然,它们线性无关. 所以一阶方程组通解为

$$\begin{pmatrix}x\\ x_1\\ y\\ y_1\end{pmatrix}=C_1e^{t}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}+C_2e^{-t}\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 1\\ -1\end{pmatrix}+C_3\begin{pmatrix}\cos t\\ -\sin t\\ -\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}+C_4\begin{pmatrix}\sin t\\ \cos t\\ -\sin t\\ -\cos t\end{pmatrix}.$$

于是,原方程组通解为

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=C_1e^{t}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}+C_2e^{-t}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}+C_3\begin{pmatrix}\cos t\\ -\cos t\end{pmatrix}+C_4\begin{pmatrix}\sin t\\ -\sin t\end{pmatrix}.$$

例 11 求解下列方程组:

(1) $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=3x+y,\\ \dfrac{dy}{dt}=3y;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x-y,\\ \dfrac{dy}{dt}=x+3y.\end{cases}$

解 (1) 方程组系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程为

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})=\begin{vmatrix}3-\lambda & 1\\ 0 & 3-\lambda\end{vmatrix}=(3-\lambda)^2=0,$$

解得特征值为 $\lambda_{1,2}=3$.

用待定系数法. 设方程组有如下形式的解

$$x=(r_{11}+r_{12}t)e^{3t},\quad y=(r_{21}+r_{22}t)e^{3t}.$$

代入原方程组，得等式

$$\begin{cases}3e^{3t}(r_{11}+r_{12}t)+e^{3t}r_{12}=3e^{3t}(r_{11}+r_{12}t)+(r_{21}+r_{22}t)e^{3t},\\3e^{3t}(r_{21}+r_{22}t)+e^{3t}r_{22}=3e^{3t}(r_{21}+r_{22}t),\end{cases}$$

消去 e^{3t}，比较 t 的同次幂的系数，得

$$r_{12}=r_{21},\quad r_{22}=0,\quad r_{11}\text{可取任意值}.$$

取 $r_{11}=1, r_{12}=r_{21}=0$，得对应于 $\lambda=3$ 的一个特解为

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=e^{3t}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}.$$

取 $r_{11}=0, r_{12}=r_{21}=1$，得对应于 $\lambda=3$ 的另一特解为

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=e^{3t}\begin{pmatrix}t\\1\end{pmatrix}.$$

显然，这两个特解线性无关. 故方程组通解为

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=C_1e^{3t}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+C_2e^{3t}\begin{pmatrix}t\\1\end{pmatrix}.$$

(2) 方程组系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程为

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})=\begin{vmatrix}1-\lambda & -1\\1 & 3-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2=0,$$

解得特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=2$.

用待定系数法. 设方程组有如下形式的解

$$x=(r_{11}+r_{12}t)e^{2t},\quad y=(r_{21}+r_{21}t)e^{2t},$$

代入方程组，得等式

$$2e^{2t}(r_{11}+r_{12}t)+e^{2t}r_{12}=e^{2t}(r_{11}+r_{12}t)-e^{2t}(r_{21}+r_{22}t),$$
$$2e^{2t}(r_{21}+r_{22}t)+e^{2t}r_{22}=e^{2t}(r_{11}+r_{12}t)+3e^{2t}(r_{21}+r_{22}t),$$

消去 e^{2t}，比较 t 的同次幂系数，得

$$r_{11}+r_{12}+r_{21}=0,\quad r_{12}+r_{22}=0,\quad r_{11}+r_{21}-r_{22}=0,$$

即
$$-r_{12}=r_{22}=r_{11}+r_{21}.$$

取 $r_{11}=1, r_{21}=0$，则 $r_{22}=1, r_{12}=-1$. 相应于 $\lambda_{1,2}=2$ 的一个特解为

$$\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(1-t)e^{2t}\\te^{2t}\end{pmatrix}.$$

又取 $r_{11}=0, r_{21}=1$，则 $r_{22}=1, r_{12}=-1$，可得另一个特解为

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -te^{2t} \\ (1+t)e^{2t} \end{pmatrix}.$$

显然，这两个解线性无关. 故方程组的通解为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1-t \\ t \end{pmatrix} + C_2 e^{2t} \begin{pmatrix} -t \\ 1+t \end{pmatrix}.$$

例 12 求解下列方程组：

$$(1)\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx}=2y_1+y_2, \\ \dfrac{dy_2}{dx}=2y_2, \\ \dfrac{dy_3}{dx}=2y_3; \end{cases} \qquad (2)\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx}=2y_1+y_2, \\ \dfrac{dy_2}{dx}=2y_2+y_3, \\ \dfrac{dy_3}{dx}=2y_3. \end{cases}$$

解 (1) 方程组系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程为

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^3 = 0,$$

解得特征值 $\lambda_{1,2,3}=2$，所以方程组有形如

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = e^{2x} \begin{pmatrix} r_{11}+r_{12}x+r_{13}x^2 \\ r_{21}+r_{22}x+r_{23}x^2 \\ r_{31}+r_{32}x+r_{33}x^2 \end{pmatrix}$$

的解，代入方程组，得

$$\begin{aligned} & 2e^{2x}(r_{11}+r_{12}x+r_{13}x^2)+e^{2x}(r_{12}+2r_{13}x) \\ & = 2e^{2x}(r_{11}+r_{12}x+r_{13}x^2)+e^{2x}(r_{21}+r_{22}x+r_{23}x^2), \\ & 2e^{2x}(r_{21}+r_{22}x+r_{23}x^2)+e^{2x}(r_{21}+r_{22}x+r_{23}x^2) \\ & = 2e^{2x}(r_{21}+r_{22}x+r_{23}x^2)+e^{2x}(r_{22}+2r_{23}x), \end{aligned}$$

$$2e^{2x}(r_{21}+r_{22}x+r_{23}x^2)+e^{2x}(r_{32}+2r_{33}x)=2e^{2x}(r_{31}+r_{32}x+r_{33}x^2),$$

消去 e^{2x}，经整理后比较 x 的同次幂系数，得

$$r_{12}=r_{21}, \quad 2r_{13}=r_{22}=0, \quad r_{33}=r_{23}=r_{32}=0,$$

r_{11},r_{12},r_{13}可取任意值.

分别取$r_{11}=1,r_{12}=0,r_{13}=0$;$r_{11}=0,r_{12}=1,r_{13}=0$;$r_{11}=0,r_{12}=0,r_{13}=1$,则相应的解分别为

$$e^{2x}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad e^{2x}\begin{pmatrix}x\\1\\0\end{pmatrix},\quad e^{2x}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

显然这三个解线性无关,故方程组的解为

$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=C_1e^{2x}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+C_2e^{2x}\begin{pmatrix}x\\1\\0\end{pmatrix}+C_3e^{2x}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

(2) 系数矩阵$\boldsymbol{A}$的特征方程为

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})=\begin{vmatrix}2-\lambda&1&0\\0&2-\lambda&1\\0&0&2-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)^3=0,$$

解得特征值为$\lambda_{1,2,3}=2$,所以方程组有形如

$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=e^{2x}\begin{pmatrix}r_{11}+r_{12}x+r_{13}x^2\\r_{21}+r_{22}x+r_{23}x^2\\r_{31}+r_{32}x+r_{33}x^2\end{pmatrix}$$

的解,代入原方程组,得

$$2e^{2x}(r_{11}+r_{12}x+r_{13}x^2)+e^{2x}(r_{12}+2r_{13}x)$$
$$=2e^{2x}(r_{11}+r_{12}x+r_{13}x^2)+e^{2x}(r_{21}+r_{22}x+r_{23}x^2),$$
$$2e^{2x}(r_{21}+r_{22}x+r_{23}x^2)+e^{2x}(r_{22}+2r_{23}x)$$
$$=2e^{2x}(r_{21}+r_{22}x+r_{23}x^2)+e^{2x}(r_{31}+r_{32}x+r_{33}x^2),$$
$$2e^{2x}(r_{31}+r_{32}x+r_{33}x^2)+e^{2x}(r_{32}+2r_{33}x)=2e^{2x}(r_{31}+r_{32}x+r_{33}x^2),$$

消去e^{2x}后,经整理比较x的同次幂系数,得

$$r_{12}=r_{21},\quad 2r_{13}=r_{22}=r_{31},\quad 2r_{23}=r_{32}=r_{33}=0,$$

r_{11}可任意取值.

分别取$r_{11}=1,r_{12}=0,r_{31}=0$;$r_{11}=0,r_{12}=1,r_{31}=0$;$r_{11}=0,r_{12}$

$=0, r_{31}=1$，得相应的解为

$$e^{2x}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad e^{2x}\begin{pmatrix}x\\1\\0\end{pmatrix},\quad e^{2x}\begin{pmatrix}\frac{x^2}{2}\\x\\1\end{pmatrix}.$$

易知这三个解在$(-\infty,+\infty)$上线性无关，于是方程组的通解为

$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=C_1e^{2x}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+C_2e^{2x}\begin{pmatrix}x\\1\\0\end{pmatrix}+C_3e^{2x}\begin{pmatrix}\frac{x^2}{2}\\x\\1\end{pmatrix}.$$

例 13 求解下列方程组：

(1) $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-x+y+z,\\ \dfrac{dy}{dt}=x-y+z,\\ \dfrac{dz}{dt}=x+y-z;\end{cases}$ (2) $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=2x-y-z,\\ \dfrac{dy}{dt}=2x-y-2z,\\ \dfrac{dz}{dt}=2z-x+y.\end{cases}$

解 (1) 方程组系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程为

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})=\begin{vmatrix}-1-\lambda & 1 & 1\\ 1 & -1-\lambda & 1\\ 1 & 1 & -1-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda+2)^2=0,$$

解得特征值$\lambda_1=1, \lambda_{2,3}=-2$.

对应于$\lambda_1=1$的特征向量$(a,b,c)^{\mathrm{T}}$满足

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},$$

解得$a=b=c$，可取$\lambda_1=1$对应特征向量为$(1,1,1)^{\mathrm{T}}$，相应的解为$e^t(1,1,1)^{\mathrm{T}}$.

$\lambda_2=-2$时，设方程组的解形如

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=e^{-2t}\begin{pmatrix}r_{11}+r_{12}t\\r_{21}+r_{22}t\\r_{31}+r_{32}t\end{pmatrix},$$

代入方程组，得等式

$$
\begin{aligned}
&-2e^{-2t}(r_{11}+r_{12}t)+e^{-2t}r_{12} \\
&=e^{-2t}(r_{11}+r_{12}t)+e^{-2t}(r_{21}+r_{22}t)+e^{-2t}(r_{31}+r_{32}t), \\
&-2e^{-2t}(r_{21}+r_{22}t)+e^{-2t}r_{22} \\
&=e^{-2t}(r_{11}+r_{12}t)-e^{-2t}(r_{21}+r_{22}t)+e^{-2t}(r_{31}+r_{32}t), \\
&-2e^{-2t}(r_{31}+r_{32}t)+e^{-2t}r_{32} \\
&=e^{-2t}(r_{11}+r_{12}t)+e^{-2t}(r_{21}+r_{22}t)-e^{-2t}(r_{31}+r_{32}t).
\end{aligned}
$$

消去 e^{-2t}，比较等式两端 t 的同次幂的系数，得

$$r_{12}=r_{22}=r_{32}=r_{11}+r_{21}+r_{31}, \quad r_{12}+r_{22}+r_{32}=0,$$

解得 $$r_{12}=r_{22}=r_{32}=0, \quad r_{11}=-r_{21}-r_{31}.$$

取 $r_{21}=-1, r_{31}=0$，则 $r_{11}=1$，相应的解为

$$e^{-2t}(1,-1,0)^{T}.$$

又取 $r_{21}=0, r_{31}=-1$，则 $r_{11}=1$，相应的解为

$$e^{-2t}(1,0,-1)^{T}.$$

显然，三个解在 $(-\infty,+\infty)$ 上线性无关，故方程组通解为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=C_1e^{t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}+C_2e^{-2t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}+C_2e^{-2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

（2）方程组系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程为

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})=\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ 2 & -1-\lambda & -2 \\ -1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}=(1-\lambda)^3=0,$$

解得特征值为 $\lambda_{1,2,3}=1$. 设方程组的解形如

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=e^{t}\begin{pmatrix} r_{11}+r_{12}t+r_{13}t^2 \\ r_{21}+r_{22}t+r_{23}t^2 \\ r_{31}+r_{32}t+r_{33}t^2 \end{pmatrix}$$

代入方程组，得

$$
\begin{aligned}
&e^{t}(r_{11}+r_{12}t+r_{13}t^2)+e^{t}(r_{12}+2r_{13}t) \\
&=2e^{t}(r_{11}+r_{12}t+r_{13}t^2)-e^{t}(r_{21}+r_{22}t+r_{23}t^2)-e^{t}(r_{31}+r_{32}t+r_{33}t^2),
\end{aligned}
$$

$$e^t(r_{21}+r_{22}t+r_{23}t^2)+e^t(r_{22}+2r_{23}t)$$
$$=2e^t(r_{11}+r_{12}t+r_{13}t^2)-e^t(r_{21}+r_{22}t+r_{23}t^2)-2e^t(r_{31}+r_{32}t+r_{33}t^2),$$
$$e^t(r_{31}+r_{32}t+r_{33}t^2)+e^t(r_{32}+2r_{33}t)$$
$$=2e^t(r_{31}+r_{32}t+r_{33}t^2)-e^t(r_{11}+r_{12}t+r_{13}t^2)+e^t(r_{21}+r_{22}t+r_{23}t^2).$$

消去e^t,整理后比较等式两端t的同次幂系数,得

$$r_{12}=r_{11}-r_{21}-r_{31},\quad r_{22}=2(r_{11}-r_{21}-r_{31}),$$
$$r_{32}=-(r_{11}-r_{21}-r_{31}),\quad r_{13}=r_{23}=r_{33}=0.$$

取$r_{11}=1,r_{21}=r_{31}=0$,则$r_{12}=1,r_{22}=2,r_{32}=-1$;

取$r_{21}=-1,r_{11}=r_{31}=0$,则$r_{12}=1,r_{22}=2,r_{32}=-1$;

取$r_{31}=-1,r_{11}=r_{21}=0$,则$r_{12}=1,r_{22}=2,r_{32}=-1$.

它们相应的解分别为

$$e^t\begin{pmatrix}1+t\\2t\\-t\end{pmatrix},\quad e^t\begin{pmatrix}t\\-1+2t\\-t\end{pmatrix},\quad e^t\begin{pmatrix}t\\2t\\-1-t\end{pmatrix}.$$

显然,这三个解在$(-\infty,+\infty)$上线性无关,所以,方程组的通解为

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=C_1e^t\begin{pmatrix}1+t\\2t\\-t\end{pmatrix}+C_2e^t\begin{pmatrix}t\\-1+2t\\-t\end{pmatrix}+C_3e^t\begin{pmatrix}t\\2t\\-1-t\end{pmatrix}.$$

从前面诸多例题可以看到,当方程组的系数矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值为单根时,一般用求对应特征向量的方法找出对应的解;当特征值为重根时,一般用常数变易法找出对应的解. 但是,求解过程都比较复杂. 除了例9所提到的"化高阶方程法"外,下面再尝试用别的方法求解齐次方程组.

设λ_i为方程组系数矩阵$\boldsymbol{A}$的n_i重特征值,则方程组一定有n_i个形如

$$x(t)=e^{\lambda_i t}\left(r_0+\frac{t}{1!}r_1+\frac{t^2}{2!}r_2+\cdots+\frac{t^{n_i-1}}{(n_i-1)!}r_{n_i-1}\right)$$

的线性无关解,其中r_0是齐次线性方程组

$$(\boldsymbol{A}-\lambda_i\boldsymbol{E})^{n_i}r=\boldsymbol{0}\ (\text{零向量})$$

的非零解. 对每一个 r_0,确定 $r_i=(\boldsymbol{A}-\lambda_i\boldsymbol{E})r_{i-1}$.

例 14 求解下列方程:

(1) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$;

(2) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-1&-3&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$.

解 (1) 方程组系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程为

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})=\begin{vmatrix}2-\lambda&1&0\\0&2-\lambda&0\\0&0&3-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)^2(3-\lambda)=0,$$

解得特征值 $\lambda_1=3,\quad \lambda_{2,3}=2$.

对应 $\lambda_1=3$ 的特征向量 $(a,b,c)^{\mathrm{T}}$ 满足

$$(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},$$

解得 $a=b,c$ 任取,可取 $\lambda_1=3$ 对应特征向量为 $\boldsymbol{r}_1=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$.

对 $\lambda_{2,3}=2$,求 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^2\boldsymbol{r}_0=\boldsymbol{0}$ 的基础解系. 因为

$$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^2=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow \boldsymbol{r}_0^{(1)}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{r}_0^{(2)}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},$$

$\boldsymbol{r}_0^{(1)},\boldsymbol{r}_0^{(2)}$ 线性无关,即为 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^2\boldsymbol{r}_0=\boldsymbol{0}$(零向量)的基础解系. 所以,原方程组的通解为

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&\mathrm{e}^{2t}&t\mathrm{e}^{2t}\\0&0&\mathrm{e}^{2t}\\\mathrm{e}^{3t}&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_1\\C_2\\C_3\end{pmatrix}.$$

注 因为有

$$\boldsymbol{r}_1^{(1)}=(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{r}_0^{(1)}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{r}_1^{(2)}=(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{r}_0^{(2)}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},$$

所以 $\quad \boldsymbol{x}_1(t)=\mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{x}_2(t)=\mathrm{e}^{2t}\left[\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right]=\mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix}t\\1\\0\end{pmatrix}.$

(2) 方程组系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程为

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})=\begin{vmatrix}-\lambda&1&0\\0&-\lambda&1\\-1&-3&-3-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda+1)^3=0,$$

解得特征值 $\lambda_{1,2,3}=-1$. 因为

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^3=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\-1&-3&-2\end{pmatrix}^3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

故方程组 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^3\boldsymbol{r}=\boldsymbol{0}$(零向量)的基础解系可取

$$\boldsymbol{r}_0^{(1)}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{r}_0^{(2)}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{r}_0^{(3)}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},$$

算得 $\boldsymbol{r}_1^{(1)}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{r}_0^{(1)}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{r}_1^{(2)}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{r}_0^{(2)}=\begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix},$

$$\boldsymbol{r}_1^{(3)}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{r}_0^{(3)}=\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{r}_2^{(1)}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{r}_1^{(1)}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{r}_2^{(2)}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{r}_1^{(2)}=\begin{pmatrix}2\\-2\\2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{r}_2^{(3)}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{r}_1^{(3)}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

于是，原方程组通解为

$$C_1\begin{pmatrix}1+t+t^2\\-t^2\\-t+t^2\end{pmatrix}e^{-t}+C_2\begin{pmatrix}t+2t^2\\1+t-2t^2\\-3t+2t^2\end{pmatrix}e^{-t}+C_3\begin{pmatrix}t^2\\t-t^2\\1-2t+t^2\end{pmatrix}e^{-t}.$$

还可以用“算子法”求解齐次线性方程组. 即用算子D表示对未知函数的微分，化齐次方程组为系数含算子D的方程组. 再由系数行列式的特征方程求出原方程组的通解.

例 15 求下列方程组的通解：

(1) $\begin{cases}\dot{x}+\dot{y}=2y,\\ \dot{x}-\dot{y}=-2x;\end{cases}$ (2) $\begin{cases}\dot{x}=-x+2y,\\ \dot{y}=-2x+3y.\end{cases}$

解 (1) 改写方程组为齐次方程组

$$\begin{cases}Dx+(D-2)y=0,\\ (D+2)x-Dy=0.\end{cases}$$

计算系数行列式

$$\Delta(D)=\begin{vmatrix}D & D-2\\ D+2 & -D\end{vmatrix}=-2(D^2-2),$$

化为解二阶方程

$$\Delta(D)x=2(2-D^2)x=0,$$

其特征方程为$2-\lambda^2=0$，解得特征根$\lambda=\pm\sqrt{2}$，所以，方程通解为

$$x=C_1e^{\sqrt{2}t}+C_2e^{-\sqrt{2}t}.$$

由第二个方程得$\dot{y}=\dot{x}+2x$，两端积分，得

$$y=x+2\int x(t)dt=x(t)+2\int(C_1e^{\sqrt{2}t}+C_2e^{-\sqrt{2}t})dt$$

$$=C_1(\sqrt{2}+1)e^{\sqrt{2}t}+C_2(1-\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}t}.$$

所以，原方程组通解为

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=C_1e^{\sqrt{2}t}\begin{pmatrix}1\\1+\sqrt{2}\end{pmatrix}+C_2e^{-\sqrt{2}t}\begin{pmatrix}1\\1-\sqrt{2}\end{pmatrix}.$$

(2) 改写方程组为齐次方程组

$$\begin{cases}(D+1)x-2y=0,\\2x+(D-3)y=0.\end{cases}$$

计算系数行列式

$$\Delta(D)=\begin{vmatrix}D+1 & -2\\2 & D-3\end{vmatrix}=(D-1)^2,$$

化为解二阶方程

$$\Delta(D)x=(D-1)^2x=0,$$

其特征方程为$(\lambda-1)^2=0$,解得特征值$\lambda_{1,2}=1$,所以,方程通解为

$$x=C_1\mathrm{e}^t+C_2t\mathrm{e}^t.$$

代入原方程组中第一个方程,得

$$y=\frac{1}{2}(\dot{x}+x)=\frac{1}{2}(2C_1+C_2+2C_2t)\mathrm{e}^t=C_1\mathrm{e}^t+C_2\left(t+\frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^t.$$

于是,原方程组通解为

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=C_1\mathrm{e}^t\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+C_2\mathrm{e}^t\begin{pmatrix}t\\\frac{1}{2}+t\end{pmatrix}.$$

下面讨论常系数非齐次线性方程组的求解问题.

例 16 求解下列方程组:

(1) $\begin{cases}\dot{x}=y+2\mathrm{e}^t,\\\dot{y}=x+t^2;\end{cases}$ (2) $\begin{cases}\dot{x}=2y-x+1,\\\dot{y}=3y-2x.\end{cases}$

解 先求对应齐次方程组的通解,再由常数变易法求原方程组的特解,就可以组合为原方程组的通解.

(1) 对应齐次方程组的特征方程为

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})=\begin{vmatrix}-\lambda & 1\\1 & -\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda+1)=0,$$

解得特征值 $\lambda_1=1,\quad \lambda_2=-1.$

由$(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{r}=\boldsymbol{0}$(零向量),可解出$\lambda_1=1,\lambda_2=-1$对应的特征向量分别为$(1,1)^{\mathrm{T}},(1,-1)^{\mathrm{T}}$. 所以,齐次方程组的通解为

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=C_1\mathrm{e}^t\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+C_2\mathrm{e}^{-t}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}.$$

用常数变易法. 设原方程组的特解形如

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = C_1(t)\mathrm{e}^t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2(t)\mathrm{e}^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

其中 $C_1'(t), C_2'(t)$ 满足

$$C_1'(t)\mathrm{e}^t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2'(t)\mathrm{e}^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^t \\ t^2 \end{pmatrix},$$

可写为方程组

$$\begin{cases} C_1'(t)\mathrm{e}^t + C_2'(t)\mathrm{e}^{-t} = 2\mathrm{e}^t, \\ C_1'(t)\mathrm{e}^t - C_2'(t)\mathrm{e}^{-t} = t^2, \end{cases}$$

解得 $\quad C_1'(t) = 1 + \frac{1}{2}t^2\mathrm{e}^{-t}, \quad C_2'(t) = \mathrm{e}^{2t} - \frac{1}{2}t^2\mathrm{e}^t.$

积分,得

$$C_1(t) = t - \frac{1}{2}t^2\mathrm{e}^{-t} - t\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-t},$$

$$C_2(t) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2t} - \frac{1}{2}t^2\mathrm{e}^{-t} + t\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^t.$$

所以,原方程组特解为

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t\mathrm{e}^t - \frac{1}{2}t^2 - t - 1 \\ t\mathrm{e}^t - \frac{1}{2}t^2 - t - 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\mathrm{e}^t - \frac{1}{2}t^2 + t - 1 \\ -\frac{1}{2}\mathrm{e}^t + \frac{1}{2}t^2 - t + 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2} + t\right)\mathrm{e}^t - t^2 - 2 \\ \left(t - \frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^t - 2t \end{pmatrix}.$$

于是,原方程组通解为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1\mathrm{e}^t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2\mathrm{e}^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2} + t\right)\mathrm{e}^t - t^2 - 2 \\ \left(t - \frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^t - 2t \end{pmatrix}.$$

(2) 对应齐次方程组的特征方程为

$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E}) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2 = 0,$$

解得特征值为$\lambda_{1,2}=1$. 故齐次方程组有如下形式的解

$$x=(r_{11}+r_{12}t)e^t, \quad y=(r_{21}+r_{22}t)e^t.$$

代入原方程组，消去e^t后得

$$2(r_{11}+r_{12}t)+r_{12}=2r_{12}+2r_{22}t,$$
$$r_{21}+r_{22}t+r_{22}=3(r_{21}+r_{22}t)-2(r_{11}+r_{12}t).$$

比较等式两端t的同次幂系数，得

$$2r_{11}+r_{12}-2r_{21}=0, \quad r_{12}=r_{22}.$$

若取$r_{21}=1$，$r_{12}=r_{22}=0$，则$r_{11}=1$，故相应的特解为

$$x_1=e^t, \quad y_1=e^t.$$

又取$r_{21}=0$，$r_{12}=r_{22}=1$，则$r_{11}=-\frac{1}{2}$，则另一个特解为

$$x_2=\left(-\frac{1}{2}+t\right)e^t, \quad y_2=te^t.$$

显然，这两个解线性无关. 故齐次方程组的通解为

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=C_1e^t\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+C_2e^t\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}+t\\t\end{pmatrix}.$$

用常数变易法求特解. 设原方程组的特解形如

$$\begin{pmatrix}\tilde{x}\\\tilde{y}\end{pmatrix}=C_1(t)e^t\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+C_2(t)e^t\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}+t\\t\end{pmatrix},$$

代入原方程组，得

$$\begin{cases}C_1'(t)e^t+C_2'(t)e^t\left(-\frac{1}{2}+t\right)=1,\\C_1'(t)e^t+C_2'(t)e^t\cdot t=0,\end{cases}$$

解得　　$C_1'(t)=2te^{-t}, \quad C_2'(t)=-2e^{-t}.$

积分，得　　$C_1(t)=-2(t+1)e^{-t}, \quad C_2(t)=2e^{-t}.$

故非齐次方程组的特解为

$$\begin{pmatrix}\tilde{x}\\\tilde{y}\end{pmatrix}=-2(t+1)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}+t\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\-2\end{pmatrix}.$$

所以，原方程组通解为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^t \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}+t \\ t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

例 17 求解下列方程组：

(1) $\begin{cases} \dot{x} = -4x - 2y + \dfrac{2}{e^t - 1}, \\ \dot{y} = 6x + 3y - \dfrac{3}{e^t - 1}; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x - 3y + \sin t, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - y - 2\cos t. \end{cases}$

解 (1) 对应齐次方程组系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程为

$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}) = \begin{vmatrix} -4-\lambda & -2 \\ 6 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda+1) = 0,$$

解得特征值为 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1$.

由 $(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E})\boldsymbol{r} = \boldsymbol{0}$（零向量），可解得对应特征值 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1$ 的特征向量分别为 $(1, -2)^T, (2, -3)^T$. 于是，齐次方程组的通解为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

用常数变易法求特解. 设原方程组有下列形式的特解

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = C_1(t) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + C_2(t) e^{-t} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix},$$

其中 $C_1'(t), C_2'(t)$ 满足

$$C_1'(t) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + C_2'(t) e^{-t} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{e^t - 1} \\ -\dfrac{3}{e^t - 1} \end{pmatrix},$$

即
$$\begin{cases} C_1'(t) + 2C_2'(t) e^{-t} = \dfrac{2}{e^t - 1}, \\ -2C_1'(t) - 3C_2'(t) e^{-t} = -\dfrac{3}{e^t - 1}, \end{cases}$$

解得　　$C_1'(t) = 0, \quad C_2'(t) = \dfrac{e^t}{e^t - 1},$

积分，得　　$C_1(t)=1,\quad C_2(t)=\ln|e^t-1|.$

故原方程特解为

$$\begin{pmatrix}\tilde{x}\\ \tilde{y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ -2\end{pmatrix}+e^{-t}\ln|e^t-1|\begin{pmatrix}2\\ -3\end{pmatrix}.$$

于是，原方程组通解为

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=C_1\begin{pmatrix}1\\ -2\end{pmatrix}+C_2e^{-t}\begin{pmatrix}2\\ -3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\ -2\end{pmatrix}+e^{-t}\ln|e^t-1|\begin{pmatrix}2\\ -3\end{pmatrix}.$$

(2) 对应齐次方程组系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程为

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})=\begin{vmatrix}4-\lambda & -3\\ 2 & -1-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-2)=0,$$

解得特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=2$.

由 $(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{r}=\boldsymbol{0}$(零向量)，可解得对应特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=2$ 的特征向量分别为 $(1,1)^{\mathrm{T}},(3,2)^{\mathrm{T}}$. 于是，齐次方程组的通解为

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=C_1e^t\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}+C_2e^{2t}\begin{pmatrix}3\\ 2\end{pmatrix}.$$

用常数变易法求特解. 设原方程组的特解为

$$\begin{pmatrix}\tilde{x}\\ \tilde{y}\end{pmatrix}=C_1(t)e^t\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}+C_2(t)e^{2t}\begin{pmatrix}3\\ 2\end{pmatrix},$$

其中 $C_1'(t),C_2'(t)$ 满足

$$\begin{cases}C_1'(t)e^t+C_2'(t)3e^{2t}=\sin t,\\ C_1'(t)e^t+C_2'(t)2e^{2t}=-2\cos t,\end{cases}$$

解得　$C_1'(t)=e^{-t}(-2\sin t-6\cos t),\quad C_2'(t)=e^{-2t}(\sin t+2\cos t),$

积分，得　$C_1(t)=2e^{-t}(2\cos t-\sin t),\quad C_2(t)=-e^{-2t}\cos t.$

于是，原方程组的特解为

$$\begin{pmatrix}\tilde{x}\\ \tilde{y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\cos t-2\sin t\\ 4\cos t-2\sin t\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\cos t\\ 2\cos t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos t-2\sin t\\ 2\cos t-2\sin t\end{pmatrix}.$$

从而，原方程组的通解为

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=C_1e^t\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}+C_2e^{2t}\begin{pmatrix}3\\ 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\cos t-2\sin t\\ 2\cos t-2\sin t\end{pmatrix}.$$

例 18 求解下列方程组：

(1) $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-n^2y+\cos nt, \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-n^2x+\sin nt; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} \dot{x}=y+\tan^2 t+1, \\ \dot{y}=-x+\tan t. \end{cases}$

解 (1) 显然$n\neq 0$. 对应齐次方程组系数矩阵$\boldsymbol{A}$的特征方程为

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})=\begin{vmatrix} -\lambda & -n^2 \\ -n^2 & -\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2-n^4=0,$$

解得特征值为$\lambda_1=n^2,\lambda_2=-n^2$.

由$(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{r}=\boldsymbol{0}$(零向量)，可解得对应特征值$\lambda_1=n^2,\lambda_2=-n^2$的特征向量分别为$(1,-1)^{\mathrm{T}},(1,1)^{\mathrm{T}}$. 于是，齐次方程组通解为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=C_1\mathrm{e}^{n^2t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}+C_2\mathrm{e}^{-n^2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

用常数变易法求特解. 设非齐次方程组通解为

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}=C_1(t)\mathrm{e}^{n^2t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}+C_2(t)\mathrm{e}^{-n^2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

其中$C_1'(t),C_2'(t)$满足

$$\begin{cases} C_1'(t)\mathrm{e}^{n^2t}+C_2'(t)\mathrm{e}^{-n^2t}=\cos nt, \\ -C_1'(t)\mathrm{e}^{n^2t}+C_2'(t)\mathrm{e}^{-n^2t}=\sin nt, \end{cases}$$

解得
$$C_1'(t)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-n^2t}(\cos nt-\sin nt),$$
$$C_2'(t)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{n^2t}(\cos nt+\sin nt).$$

积分，得

$$C_1(t)=\frac{1}{2n(n^2+1)}\mathrm{e}^{-n^2t}[(1+n)\sin nt-(n-1)\cos nt],$$

$$C_2(t)=\frac{1}{2n(n^2+1)}\mathrm{e}^{n^2t}[(1+n)\sin nt-(n-1)\cos nt].$$

于是，非齐次方程组的特解为

$$\begin{pmatrix}\tilde{x}\\ \tilde{y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{n+1}{n(n^2+1)}\sin nt\\ \dfrac{n-1}{n(n^2+1)}\cos nt\end{pmatrix}.$$

所以,原方程组通解为

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=C_1\mathrm{e}^{n^2t}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}+C_2\mathrm{e}^{-n^2t}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\dfrac{n+1}{n(n^2+1)}\sin nt\\ \dfrac{n-1}{n(n^2-1)}\cos nt\end{pmatrix}.$$

(2) 对应齐次方程组系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程为

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})=\begin{vmatrix}-\lambda & 1\\ 1 & -\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+1=0,$$

解得特征值 $\lambda_1=\mathrm{i},\lambda_2=-\mathrm{i}$.

对应 $\lambda_1=\mathrm{i}$ 的形如 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}(a,b)^{\mathrm{T}}$ 的解,代入齐次方程组后可得

$$\begin{cases}a\mathrm{i}-b=0\\ b\mathrm{i}+a=0\end{cases}\Rightarrow\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\begin{pmatrix}1\\ \mathrm{i}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos t+\mathrm{i}\sin t\\ -\sin t+\mathrm{i}\cos t\end{pmatrix},$$

于是,齐次方程组通解为

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=C_1\begin{pmatrix}\cos t\\ -\sin t\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}.$$

用常数变易法求特解. 设原方程特解为

$$\begin{pmatrix}\tilde{x}\\ \tilde{y}\end{pmatrix}=C_1(t)\begin{pmatrix}\cos t\\ -\sin t\end{pmatrix}+C_2(t)\begin{pmatrix}\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}.$$

代入原方程,知 $C_1'(t),C_2'(t)$ 满足

$$\begin{cases}C_1'(t)\cos t+C_2'(t)\sin t=\tan^2 t+1,\\ -C_1'(t)\sin t+C_2'(t)\cos t=\tan t,\end{cases}$$

解得 $\qquad C_1'(t)=\cos t,\quad C_2'(t)=\left(\dfrac{1}{\cos^2 t}+1\right)\sin t,$

积分,得 $\qquad C_1(t)=\sin t,\quad C_2(t)=\dfrac{\sin t}{\cos t}.$

于是,原方程组的特解为

$$\begin{pmatrix}\tilde{x}\\ \tilde{y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sin t\cos t\\ -\sin^2 t\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\dfrac{\sin^3 t}{\cos t}\\ \sin^2 t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sin t\cos t+\dfrac{\sin^3 t}{\cos t}\\ 0\end{pmatrix}.$$

所以,原方程的通解为

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=C_1\begin{pmatrix}\cos t\\ -\sin t\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\sin t\cos t+\tan t\cdot\sin^2 t\\ 0\end{pmatrix}.$$

例16、例17、例18都是用常数变易法求解非齐次方程组,下面介绍其他方法.

如果非齐次方程组的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个不同的特征向量 α_1, $\alpha_2,\cdots,\alpha_n$,则 $\boldsymbol{A}$ 可化为对角矩阵 $\boldsymbol{D}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$,其中 λ_1,λ_2, $\cdots,\lambda_n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值. 此时,可用线性变换 $x=\boldsymbol{T}y$(其中 $\boldsymbol{T}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$)将非齐次方程组化为

$$y'=\boldsymbol{D}y+G(t),\quad G(t)=\boldsymbol{T}^{-1}F(t),$$

由于 $y'=\boldsymbol{D}y+G(t)$ 是 n 个相互独立的方程

$$y_i'=\lambda_i y_i+g_i(t)\quad(i=1,2,\cdots,n),$$

故可直接求出解

$$y_i(t)=C_i\mathrm{e}^{\lambda_i t}+\mathrm{e}^{\lambda_i t}\int_{t_0}^{t}\mathrm{e}^{-\lambda_i\tau}g_i(\tau)\mathrm{d}\tau,$$

再利用变换 $x=\boldsymbol{T}y$ 求得原方程的解.

例19 用线性变换法求解方程组

$$\dot{x}=\begin{pmatrix}-4 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}x+\begin{pmatrix}\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{2}{t}+4\end{pmatrix}.$$

解 对应齐次方程组系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程为

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})=\begin{vmatrix}-4-\lambda & 2\\ 2 & -1-\lambda\end{vmatrix}=\lambda(\lambda+5)=0,$$

解得特征值为 $\lambda_1=0,\lambda_2=-5$. 可求得对应的特征向量为 $(1,2)^{\mathrm{T}}$, $(-2,1)^{\mathrm{T}}$. 故矩阵 $\boldsymbol{T}$ 与它的逆矩阵 $\boldsymbol{T}^{-1}$ 为

$$T=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & 1\end{pmatrix},\quad T^{-1}=\begin{pmatrix}1/5 & 2/5\\ -2/5 & 1/5\end{pmatrix}.$$

设$x=Ty$,则方程组变为

$$\dot{y}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & -5\end{pmatrix}y+\begin{pmatrix}1/t+8/5\\ 4/5\end{pmatrix},$$

即
$$\begin{cases}y_1'=\dfrac{1}{t}+\dfrac{8}{5},\\[2mm] y_2'=-5y_2+\dfrac{4}{5}.\end{cases}$$

得
$$\begin{cases}y_1(t)=\ln|t|+\dfrac{8}{5}t+C_1,\\[2mm] y_2(t)=C_2e^{-5t}+\dfrac{4}{25}.\end{cases}$$

所以,原方程组通解为

$$x(t)=Ty(t)=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\ln|t|+\dfrac{8}{5}t+C_1\\[2mm] C_2e^{-5t}+\dfrac{4}{25}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\ln|t|+\dfrac{8}{5}t+C_1-2C_2e^{-5t}-\dfrac{8}{25}\\[2mm] 2\ln|t|+\dfrac{16}{5}t+2C_1+C_2e^{-5t}+\dfrac{4}{25}\end{pmatrix}$$

或$x(t)=\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}\ln|t|+\dfrac{8}{5}\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}t+\dfrac{4}{25}\begin{pmatrix}-2\\ 1\end{pmatrix}+C_1\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}+C_2e^{-5t}\begin{pmatrix}-2\\ 1\end{pmatrix}$.

某些常系数非齐次线性方程组也可以用待定系数法求其特解,如$F(t)$为多项式与指数函数乘积时的情形.

例20 用待定系数法求方程组的特解

$$\dot{x}=\begin{pmatrix}-5 & -1\\ 1 & -3\end{pmatrix}x+\begin{pmatrix}-1\\ 2\end{pmatrix}e^{-4t}.$$

解 对应齐次方程组系数矩阵A的特征方程为

$$\det(A-\lambda E)=\begin{pmatrix}-5-\lambda & -1\\ 1 & -3-\lambda\end{pmatrix}=(\lambda+4)^2=0,$$

解得特征值为$\lambda_{1,2}=-4$. 故原方程组特解形式为

$$\tilde{x}=\begin{pmatrix}a_1t^2+b_1t+c_1\\a_2t^2+b_2t+c_2\end{pmatrix}e^{-4t},$$

代入原方程组，得

$$2a_1t+b_1-4(a_1t^2+b_1t+c_1)$$
$$=-5(a_1t^2+b_1t+c_1)-(a_2t^2+b_2t+c_2)-1,$$
$$2a_2t+b_2-4(a_2t^2+b_2t+c_2)$$
$$=a_1t^2+b_1t+c_1-3(a_2t^2+b_2t+c_2)+2,$$

比较t的同次幂的系数，得代数方程组

$$\begin{cases}a_1+a_2=0,\\2a_1+b_1+b_2=0,\\2a_2-b_1-b_2=0,\\b_1+c_1+c_2=0,\\b_2-c_1-c_2=2,\end{cases}$$

解得 $a_1=-\dfrac{1}{2}$, $a_2=\dfrac{1}{2}$, $b_1+b_2=1, b_1+c_1+c_2=-1$.

取$b_1=0, c_1=0$，求得原方程组的特解为

$$\tilde{x}=\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{2}t^2\\\dfrac{1}{2}t^2+t-1\end{pmatrix}e^{-4t}.$$

下面举一个一题多解的例子.

例 21 求方程组的通解

$$\dot{x}=\begin{pmatrix}0&1\\2&-1\end{pmatrix}x+\begin{pmatrix}2-2t\\1\end{pmatrix}.$$

解 **解法一**(常数变易法) 对应齐次方程组系数矩阵A的特征方程为

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}-\lambda&1\\2&-1-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda+2)=0,$$

解得特征值为$\lambda_1=1, \lambda_2=-2$.

由 $(A-\lambda E)r=\mathbf{0}$（零向量），可解得对应特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=-2$ 的特征向量分别为 $(1,1)^{\mathrm{T}},(1,-2)^{\mathrm{T}}$. 故齐次方程组的基解矩阵 $\Phi(t)$ 与逆矩阵 $\Phi^{-1}(t)$ 为

$$\Phi(t)=\begin{pmatrix} e^{t} & e^{-2t} \\ e^{t} & e^{-2t} \end{pmatrix},\quad \Phi^{-1}(t)=\begin{pmatrix} \frac{2}{3}e^{-t} & \frac{1}{3}e^{-t} \\ \frac{1}{3}e^{2t} & -\frac{1}{3}e^{2t} \end{pmatrix},$$

所以，原方程组通解为

$$\begin{aligned} x(t)&=\Phi(t)\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}+\Phi(t)\int\Phi^{-1}(t)\begin{pmatrix} 2-2t \\ 1 \end{pmatrix}\mathrm{d}t \\ &=\Phi(t)\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}+\Phi(t)\int\begin{pmatrix} \frac{5}{3}e^{-t}-\frac{4}{3}te^{-t} \\ \frac{1}{3}e^{2t}-\frac{2}{3}te^{2t} \end{pmatrix}\mathrm{d}t \\ &=\Phi(t)\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}+\Phi(t)\begin{pmatrix} -\frac{1}{3}e^{-t}+\frac{4}{3}te^{-t} \\ \frac{1}{3}e^{2t}-\frac{1}{3}te^{2t} \end{pmatrix} \\ &=\begin{pmatrix} C_1e^{t}+C_2e^{-2t}+t \\ C_1e^{t}-2C_2e^{-2t}+2t-1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

解法二（待定系数法） 由解法一知，对应齐次方程组的通解为

$$x(t)=\Phi(t)\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} C_1e^{t}+C_2e^{-2t} \\ C_1e^{t}-2C_2e^{-2t} \end{pmatrix}.$$

因为 $F(t)$ 可表示为 $F(t)=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}=a+tb$，所以，原方程组可写为

$$\dot{x}=Ax+a+tb. \qquad ①$$

又因为 $\lambda=0$ 不是特征值，所以原方程组特解形式为

$$\tilde{x}=u+tv \quad (u,v\text{ 待定}).$$

将 $\tilde{x}$ 代入式①，得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{u}+t\boldsymbol{v})=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{u}+t\boldsymbol{v})+(a+tb),$$

即
$$\boldsymbol{v}=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}+a)+t(\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}+b).$$

比较等式两端 t 的同次幂的系数，得

$$\begin{cases}\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}+b=\boldsymbol{0}(\text{零向量}),\\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}+a=\boldsymbol{v},\end{cases}$$

解得
$$\boldsymbol{v}=-\boldsymbol{A}^{-1}b=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{u}=\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{v}-a)=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}.$$

故方程组特解为

$$\widetilde{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{u}+t\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}t\\-1+2t\end{pmatrix}.$$

所以，原方程组通解为

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)t+\widetilde{\boldsymbol{x}}=\begin{pmatrix}C_1\mathrm{e}^t+C_2\mathrm{e}^{-2t}+t\\C_1\mathrm{e}^t-2C_2\mathrm{e}^{-2t}+2t-1\end{pmatrix}.$$

解法三（线性变换法） 因为对应齐次方程组系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程有特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=-2$，特征值对应的特征向量分别为 $(1,1)^{\mathrm{T}}$ 和 $(1,-2)^{\mathrm{T}}$，所以由特征向量构成的矩阵 $\boldsymbol{T}$ 和逆矩阵 $\boldsymbol{T}^{-1}$ 分别为

$$\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}1&1\\1&-2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{T}^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&1\\1&-1\end{pmatrix}.$$

作变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{T}\boldsymbol{y}$，并代入原方程组，得

$$\dot{\boldsymbol{y}}=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}\boldsymbol{y}+\boldsymbol{T}^{-1}\begin{pmatrix}2-2t\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&-2\end{pmatrix}\boldsymbol{y}+\frac{1}{3}\begin{pmatrix}5-4t\\1-2t\end{pmatrix},$$

故
$$y_1'=y_1+\frac{1}{3}(5-4t),\quad y_2'=-2y_2+\frac{1}{3}(1-2t),$$

解上述方程，得

$$\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}C_1\mathrm{e}^t+\frac{1}{3}(4t-1)\\C_2\mathrm{e}^{-2t}+\frac{1}{3}(1-t)\end{pmatrix}.$$

所以，原方程组通解为

$$x(t)=Ty(t)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_1e^t+\frac{1}{3}(4t-1)\\ C_2e^{-2t}+\frac{1}{3}(1-t)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}C_1e^t+C_2e^{-2t}+t\\ C_1e^t-2C_2e^{-2t}+2t-1\end{pmatrix}.$$

解法四（消元法） 把原方程组写为

$$\begin{cases}x_1'=x_2+2-2t,\\ x_2'=2x_1-x_2+1.\end{cases} \qquad ①$$

由式①中第一式，得

$$x_2=x_1'+2t-2. \qquad ②$$

代入式①中第二式，得

$$x_1''+x_1'-2x_1=1-2t$$

是常系数二阶非齐次线性方程，求得其通解为

$$x_1=C_1e^t+C_2e^{-2t}+t,$$

代入式②，得

$$x_2=C_1e^t-2C_2e^{-2t}+2t-1.$$

所以，原方程组的通解为

$$x(t)=\begin{pmatrix}C_1e^t+C_2e^{-2t}+t\\ C_1e^t-2C_2e^{-2t}+2t-1\end{pmatrix}.$$

下面讨论常系数非齐次线性方程组的初值问题.

例 22 求解初值问题

$$\frac{dx}{dt}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & -2\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}x+\begin{pmatrix}0\\ 0\\ e^t\cos t\end{pmatrix}, \quad x(0)=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 1\end{pmatrix}.$$

解 对应齐次方程组的系数矩阵 A 的特征方程为

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}1-\lambda & 0 & 0\\ 2 & 1-\lambda & -2\\ 3 & 2 & 1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)(\lambda^2-2\lambda+5)=0,$$

解得特征值为 $\lambda_1=1, \lambda_{2,3}=1\pm 2\mathrm{i}$.

由 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{r}=\boldsymbol{0}$(零向量)可解得,$\lambda_1=1$ 对应的特征向量为 $\boldsymbol{r}_1=(2,-3,2)^{\mathrm{T}}$,对应解为 $\mathrm{e}^t(2,-3,2)^{\mathrm{T}}$.

由 $(\boldsymbol{A}-(1+2\mathrm{i})\boldsymbol{E})\boldsymbol{r}=\boldsymbol{0}$(零向量)可解得,$\lambda_2=1+2\mathrm{i}$ 对应的特征向量 $\boldsymbol{r}_2=(0,1,-\mathrm{i})^{\mathrm{T}}$,所以对应的复值解为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(t)&=\begin{pmatrix}0\\1\\-\mathrm{i}\end{pmatrix}\mathrm{e}^{(1+2\mathrm{i})t}\\&=\mathrm{e}^t\left(\cos 2t\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+\sin 2t\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)+\mathrm{i}\mathrm{e}^t\left(\sin 2t\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}-\cos 2t\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right),\end{aligned}$$

即 $\lambda_{2,3}=1\pm 2\mathrm{i}$ 对应两个实值解

$$\mathrm{e}^t\begin{pmatrix}0\\\cos 2t\\\sin 2t\end{pmatrix},\quad \mathrm{e}^t\begin{pmatrix}0\\\sin 2t\\-\cos 2t\end{pmatrix}.$$

显然,这三个解线性无关. 所以基解矩阵为

$$\boldsymbol{\Phi}(t)=\begin{pmatrix}2\mathrm{e}^t & 0 & 0\\-3\mathrm{e}^t & \cos 2t & \sin 2t\\2\mathrm{e}^t & \sin 2t & -\cos 2t\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\Phi}^{-1}(0)=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\-3 & 1 & 0\\2 & 0 & -1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1/2 & 0 & 0\\3/2 & 1 & 0\\1 & 0 & -1\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t)=\mathrm{e}^t\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\-\frac{3}{2}(1-\cos 2t)+\sin 2t & \cos 2t & -\sin 2t\\1+\frac{3}{2}\sin 2t-\cos 2t & \sin 2t & \cos 2t\end{pmatrix}.$$

所以,原方程满足初始条件的解为

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+\boldsymbol{\Phi}(t)\int_0^t\boldsymbol{\Phi}^{-1}(\tau)\begin{pmatrix}0\\0\\\mathrm{e}^{\tau}\cos 2\tau\end{pmatrix}\mathrm{d}\tau$$

$$=\mathrm{e}^{t}\begin{pmatrix}0\\ \cos 2t-\sin 2t\\ \cos 2t+\sin 2t\end{pmatrix}+\boldsymbol{\Phi}(t)\int_0^t\begin{pmatrix}0\\ \sin 2\tau\cos 2\tau\\ \cos^2 2\tau\end{pmatrix}\mathrm{d}\tau$$

$$=\mathrm{e}^{t}\begin{pmatrix}0\\ \cos 2t-\left(1+\dfrac{t}{2}\right)\sin 2t\\ \left(1+\dfrac{t}{2}\right)\cos 2t+\dfrac{5}{4}\sin 2t\end{pmatrix}.$$

例 23 求解初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x+2y+\mathrm{e}^{t}, & x(0)=-1,\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=4x+3y+1, & y(0)=1.\end{cases}$$

解 对应齐次方程组的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程为

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})=\begin{vmatrix}1-\lambda & 2\\ 4 & 3-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda-5)=0,$$

解得特征值 $\lambda_1=-1,\lambda_2=5$.

由 $(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{r}=\boldsymbol{0}$(零向量)解得,$\lambda_1=-1,\lambda_2=5$ 对应的特征向量分别为 $(1,-1)^{\mathrm{T}},(1,2)^{\mathrm{T}}$. 于是,齐次方程的通解为

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=C_1\mathrm{e}^{-t}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}+C_2\mathrm{e}^{5t}\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}.$$

用常数变易法. 设非齐次方程的特解为

$$\begin{pmatrix}\tilde{x}\\ \tilde{y}\end{pmatrix}=C_1(t)\mathrm{e}^{-t}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}+C_2(t)\mathrm{e}^{5t}\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix},$$

代入原方程组,知 $C_1'(t),C_2'(t)$ 满足

$$\begin{cases}C_1'(t)\mathrm{e}^{-t}+C_2'(t)\mathrm{e}^{5t}=\mathrm{e}^{t},\\ -C_1'(t)\mathrm{e}^{-t}+2C_2'(t)\mathrm{e}^{5t}=1,\end{cases}$$

解得 $\quad C_1'(t)=\dfrac{1}{3}(2\mathrm{e}^{2t}-\mathrm{e}^{t}),\quad C_2'(t)=\dfrac{1}{3}(\mathrm{e}^{-5t}+\mathrm{e}^{-4t}),$

积分,得 $\quad C_1(t)=\dfrac{1}{3}(\mathrm{e}^{2t}-\mathrm{e}^{t}),$

$$C_2(t)=-\frac{1}{60}(4e^{-5t}+5e^{-4t}).$$

于是，原方程组特解为

$$\begin{pmatrix}\tilde{x}\\ \tilde{y}\end{pmatrix}=\frac{e^t-1}{3}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}+\frac{-4-5e^t}{60}\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{20}(5e^t-8)\\ \frac{1}{10}(-5e^2+2)\end{pmatrix}.$$

所以，原方程组通解为

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=C_1e^{-t}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}+C_2e^{5t}\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{1}{20}(5e^t-8)\\ \frac{1}{10}(-5e^t+2)\end{pmatrix}.$$

代入初始条件 $x(0)=0,y(0)=0$，解得

$$\begin{cases}C_1+C_2=-\frac{17}{20},\\ -C_1+2C_2=\frac{13}{10}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C_1=-1,\\ C_2=\frac{3}{20}.\end{cases}$$

从而，所求初值问题的解为

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{20}e^{5t}-e^{-t}+\frac{1}{4}e^t-\frac{2}{5}\\ \frac{3}{10}e^{5t}+e^{-t}-\frac{1}{2}e^t+\frac{1}{5}\end{pmatrix}.$$

例 24 用拉普拉斯变换求解初值问题

$$\begin{cases}x'=3x+5y-2e^{3t}-55\cos t, & x(0)=0,\\ y'=-5x+3y+5e^{3t}-5\sin t, & y(0)=0.\end{cases}$$

解 令 $\mathscr{L}[x(t)]=X(s),\mathscr{L}[y(t)]=Y(s)$，则对方程两端进行拉普拉斯变换，得

$$\begin{cases}sX(s)=3X(s)+5Y(s)-\frac{2}{s-3}-\frac{55s}{s^2+1},\\ sY(s)=-5X(s)+3Y(s)+\frac{2}{s-3}-\frac{5}{s^2+1},\end{cases}$$

即
$$\begin{cases}(s-3)X(s)-5Y(s)=-\dfrac{2}{s-3}-\dfrac{55s}{s^2+1},\\ 5X(s)+(s-3)Y(s)=\dfrac{2}{s-3}-\dfrac{5}{s^2+1},\end{cases}$$

解得
$$\begin{cases}X(s)=\dfrac{-42}{(s-3)^2+25}-\dfrac{6(s-3)}{(s-3)^2+25}\\ \qquad+\dfrac{5s}{s^2-1}+\dfrac{1}{s-3},\\ Y(s)=\left(-\dfrac{42}{5}\right)\dfrac{s-3}{(s-3)^2+25}+\dfrac{30}{(s-3)^2+25}+\dfrac{2}{5}\dfrac{1}{s-3}\\ \qquad-\dfrac{1}{s^2+1}+\dfrac{8s}{s^2+1}.\end{cases}$$

进行拉普拉斯逆变换(可查表),即求得原方程组初值问题的解
$$\begin{cases}x(t)=\left(-6\cos5t+\dfrac{42}{5}\sin5t\right)e^{3t}+e^{3t}+5\cos t,\\ y(t)=\left(-\dfrac{42}{5}\cos5t+6\sin5t\right)e^{3t}+\dfrac{2}{5}e^{3t}-\sin t+8\cos t.\end{cases}$$

例25 养猪场出售生猪有一个最佳出售时间.因为将生猪在体重过小的时候出售,显然利润不佳.而猪养得越大,单位时间饲养费用就越大,到一定的时候体重增加的速度却会下降,且单位体重的销售价格却不会随体重增加而增加.因此,饲养时间过短或过长都是不合算的.只有选取一个最佳的出售时间,才能获得最大利润.试建立这一问题的数学模型,并对最佳出售时间作出理论探讨.

解 假定生猪体重$W(t)$符合罗吉斯蒂(Logistic)模型$\dfrac{dW}{dt}=\alpha(1-aW)$,饲养费用$y(t)$满足方程$\dfrac{dy}{dt}=b+eW$.

设$W(t)$为一头猪t天后的体重(单位:kg),$y(t)$为一头猪从出生到t天后所消耗的总饲养费用,C为每千克生猪的出售价,$L(t)$为t时刻出售生猪可获得的纯利润.则所给问题的数学模型为:求函数
$$L(t)=CW(t)-y(t)$$

的最大值点，其中$W(t)$与$y(t)$满足下列微分方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}=a\left(1-\dfrac{W}{\overline{W}}\right), & W(0)=W_0,\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=b+\mathrm{e}W, & y(0)=0.\end{cases}$$

C,α,b,e 均为正常数，$\overline{W}$ 为生猪体重的最大值.

设$W(t_s)=W(s)$为可上市出售的生猪的最小体重，t 为饲养时间，注意到达最小可出售体重且能获利的充要条件为

$$CW_s-y(t_s)\geqslant CW_0 \quad (W_0\text{ 为初生小猪的体重}),$$

则可得下列结论：

(1) 若$\dfrac{\overline{W}r}{\overline{W}-W_s}<C\alpha+\beta$，则

$$t_0=\frac{\overline{W}}{\alpha}\ln\frac{(\alpha+\beta)(\overline{W}+W_0)}{\alpha\overline{W}}>\frac{\overline{W}}{\alpha}\ln\frac{\overline{W}-W_0}{\overline{W}-W_s}=t_s.$$

此时应让生猪在达到最低销售体重后再饲养一段时间，当$t=t_0$时再出售，可获最大利润.

(2) 若$\dfrac{\overline{W}r}{\overline{W}-W_s}>C\alpha+\beta$，则有$t_0<t_s$，此时要等到$t=t_s$，才能出售.

(3) 若$\dfrac{\overline{W}r}{\overline{W}-W_s}=C\alpha+\beta$，则$t_0=t_s$，此时出售利润最大.

其中r为一常数.

例26 质量为m的两个小球，由轻质弹簧连接，弹簧未拉长时长度为l_0，当它被拉到l_1时$(t=0)$，这两个小球一个铅直地位于另一个上面而开始降落. 经过T秒钟，弹簧长度又缩到l_0. 如果不计阻力，试求这两个小球的运动规律.

解 用x表示上面小球的位移，y表示下面小球的位移，建立微分方程组

$$\begin{cases}m\ddot{x}=mg+k(y-x-l_0), & x(0)=\dot{x}(0)=0,\\ m\ddot{y}=mg-k(y-x-l_0), & y(0)=l_1,\dot{y}(0)=0,\end{cases}$$

其中k为比例系数.

将两个方程相加,得

$$\ddot{x}+\ddot{y}=2g,$$

两端积分,得

$$\dot{x}+\dot{y}=2gt+C_1.$$

代入初始条件,解得$C_1=0$,即有

$$\dot{x}+\dot{y}=2gt,$$

再次积分,得

$$x+y=gt^2+C_2.$$

代入初始条件,解得$C_2=l_1$,即有

$$x+y=gt^2+l_1. \qquad ①$$

将方程组两方程相减,令$z=y-x$,则得

$$\ddot{z}=-\frac{2k}{m}z+\frac{2k}{m}l_0. \qquad ②$$

解方程①,可得

$$z=y-x=C_1\cos\sqrt{\frac{2k}{m}}t+C_2\sin\sqrt{\frac{2k}{m}}t+l_0.$$

代入初始条件,解得$C_1=l_1-l_0$,$C_2=0$,故

$$y-x=(l_1-l_0)\cos\sqrt{\frac{2k}{m}}t+l_0. \qquad ③$$

又因为当$t=T$时,$y-x=l_0$,可得$\sqrt{\frac{2k}{m}}=\frac{\pi}{2T}$. 故由式①与式②,得方程组的解为

$$\begin{cases} x=\frac{1}{2}\left[gt^2+(l_1-l_0)\left(1-\cos\frac{\pi}{2T}t\right)\right], \\ y=\frac{1}{2}\left[gt^2+(l_1-l_0)\cos\frac{\pi}{2T}t+l_1+l_0\right]. \end{cases}$$

第五章 定性与稳定性概念

在现代科学技术中，定性理论与稳定性理论都有着广泛的和重要的应用．本章将对定性理论与稳定性理论的基本概念进行讨论．

第一节 相平面作图 初等奇点附近的轨线分布

主要内容

1．研究微分方程组

$$\begin{cases}\dot{x}=P(x,y),\\ \dot{y}=Q(x,y).\end{cases} \qquad ①$$

假定 $P(x,y)$，$Q(x,y)$ 在区域 R：$|x|<H$，$|y|<H$ $(H\leqslant+\infty)$ 上连续并满足初值解的存在与唯一性定理的条件．这种右端函数不显含 t 的方程组①称为**自治系统**．右端函数显含 t 的方程组

$$\begin{cases}\dot{x}=P(t,x,y),\\ \dot{y}=Q(t,x,y)\end{cases} \qquad ②$$

称为**非自治系统**．

xOy 平面称为方程组①的**相平面**，解 $x=x(t)$，$y=y(t)$ 在 xOy 平面上的轨迹称为方程组①的**轨线**或**相轨线**．相轨线在相平面上的图像称为方程组①的**相图**．

2．关于自治系统①的轨线的几个问题．

（1）使 $P(x_0,y_0)=Q(x_0,y_0)=0$ 的 $x=x_0$，$y=y_0$ 是方程组①

的常数解，它的轨线是一个点(x_0,y_0). 这样的点称为方程组①的**平衡点或奇点**.

对不是奇点的轨线，当自变量t变化时，动点(x,y)在轨线上沿一定方向运动，对应于t增加的方向称为轨线的**正向**，对应于t减少的方向称为轨线的**负向**.

(2) 设$x=x(t),y=y(t)$是自治系统①的一个解，则对于任意常数τ，函数

$$x=x(t+\tau),\quad y=y(t+\tau)$$

也是方程组①的解.

从而知，方程组①的积分曲线沿t轴作任意平移后仍是方程组①的积分曲线. 它们对应的轨线也相同，即自治系统的一条轨线对应着无穷多个解.

(3) 如果$P(x,y),Q(x,y)$满足方程组①的初值解的存在与唯一性定理条件，则过相平面上的区域R的任一点(x_0,y_0)，方程组①存在一条且唯一一条轨线.

(4) 设$x=x(t),y=y(t)$是方程组①的周期为T的非常数周期解，即对任意的t，有

$$x(t+T)\equiv x(t),\quad y(t+T)\equiv y(t),$$

则它的轨线是一条闭轨线. 反之，若方程组①存在闭轨线，则这闭轨线所对应的解都是方程组①的周期解.

自治系统①的轨线分为三类：奇点，闭轨线，自身不相交的开轨线.

3. 二阶线性系统的一般形式为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=a_{11}x+a_{12}y,\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=a_{21}x+a_{22}y,\end{cases}\qquad \det\boldsymbol{A}\neq 0. \tag{③}$$

令$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$，方程组化为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}. \tag{4}$$

（1）系数矩阵为标准形的二阶线性系统的轨线分布.

存在非奇异矩阵$\boldsymbol{T}$，使得$\boldsymbol{J}=\boldsymbol{T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}^{-1}$（$\boldsymbol{J}$ 为约当标准形）. 作代换$\widetilde{\boldsymbol{X}}=\boldsymbol{T}\boldsymbol{X}$，则式④化为

$$\frac{\mathrm{d}\widetilde{\boldsymbol{X}}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{J}\widetilde{\boldsymbol{X}}. \tag{5}$$

$\boldsymbol{J}$ 的形式由 $\boldsymbol{A}$ 的特征根形式决定.

当$\boldsymbol{A}$ 的特征根为相异实根λ,μ时，

$$\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \mu\end{pmatrix}\quad(\lambda\neq\mu). \tag{6}$$

当$\boldsymbol{A}$ 的特征根为重根时，

$$\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}\quad\text{或}\quad\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 1 & \lambda\end{pmatrix}. \tag{7}$$

当$\boldsymbol{A}$ 的特征根为共轭复根$\alpha\pm\beta\mathrm{i}$ 时，

$$\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ -\beta & \alpha\end{pmatrix}\quad(\beta\neq 0). \tag{8}$$

当$\boldsymbol{J}$ 为式⑤时，轨线方程为

$$y=C|x|^{\frac{\mu}{\lambda}}\quad(|\mu|>|\lambda|).$$

若λ,μ 同号，轨线为抛物线形. 当$\mu<\lambda<0$ 时，原点O 是**稳定结点**；当$\mu>\lambda>0$ 时，原点O 是**不稳定结点**. 若λ,μ 异号，轨线为双曲线形. 原点O 是**鞍点**.

当$\boldsymbol{J}$ 为式⑥的第一式时，轨线方程为$y=Cx$. 轨线为从奇点出发的半射线. $\lambda<0$ 时，奇点O 是**稳定的临界结点**；$\lambda>0$ 时，O 为**不稳定的临界结点**.

当$\boldsymbol{J}$ 为式⑥的第二式时，轨线方程为$C_1\lambda y=(C_1\ln|x|+C_0)x$. 当$\lambda<0$ 时，奇点O 是**稳定的退化结点**；当$\lambda>0$ 时，奇点O 是**不稳定的退化结点**.

当$\boldsymbol{J}$ 为式⑦时，轨线的极坐标方程为$\rho=Ce^{-\alpha\theta/\beta}$. 如$\alpha\neq0$，轨线

是对数螺线族. 当$\alpha<0$时，原点O是**稳定焦点**；当$\alpha>0$时，原点O是**不稳定焦点**；当$\alpha=0$时，轨线是圆族$\rho=C$或$x^2+y^2=C^2$，奇点是**中心**.

(2) 一般的二阶线性系统的轨线分布

一般的二阶线性系统$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$可以由式⑤经逆变换$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{T}^{-1}\widetilde{\boldsymbol{X}}$而得到，$\boldsymbol{T}^{-1}$具有不变性. 因此式⑤在各种情况下的轨线，经过线性变换$\boldsymbol{T}^{-1}$后得到式④的轨线，其结点型、鞍点型、焦点型以及中心型的轨线分布是不变的，具有轨线结构不变性. 由于变换后轨线趋向原点的方向不变，所以结点、焦点的稳定性也不变.

系统$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$的奇点$O(0,0)$，当$\boldsymbol{A}\neq 0$时，根据$\boldsymbol{A}$的特征根的不同情况有如下的类型：

- 实根
  - 相异(非零)实根
    - 同号——结点
    - 异号——鞍点
  - 重(非零)实根
    - 临界结点
    - 退化结点
- 复根
  - 实部不为零——焦点
  - 实部为零——中心

若$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$的系数矩阵的特征方程为$\lambda^2+\sigma\lambda+\Delta=0$，其中

$$\sigma=-(a_{11}+a_{22}),\quad \Delta=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

特征根为$\lambda_{1,2}=\frac{1}{2}\left(-\sigma\pm\sqrt{\sigma^2-4\Delta}\right)$. 则

(i) 当$\sigma^2-4\Delta>0$，$\Delta>0$时，

若$\sigma<0$，则二根同为正
若$\sigma>0$，则二根同为负 }——奇点为结点.

当$\sigma^2-4\Delta>0$，$\Delta<0$时，二根异号——奇点为鞍点.

(ii) 当$\sigma^2-4\Delta=0$时，

若$\sigma<0$,则有正的重根
若$\sigma>0$,则有负的重根 }——奇点为临界结点或退化结点.

(iii) 当$\sigma^2-4\Delta<0$时,若$\sigma\neq0$,则复数根的实部不为零,奇点为焦点. 若$\sigma=0$,则复数根的实部为零,奇点为中心.

即由曲线$\sigma^2=4\Delta$,Δ轴及σ轴将$\sigma O\Delta$平面分为对应不同类型奇点的几个区域(图5.1).

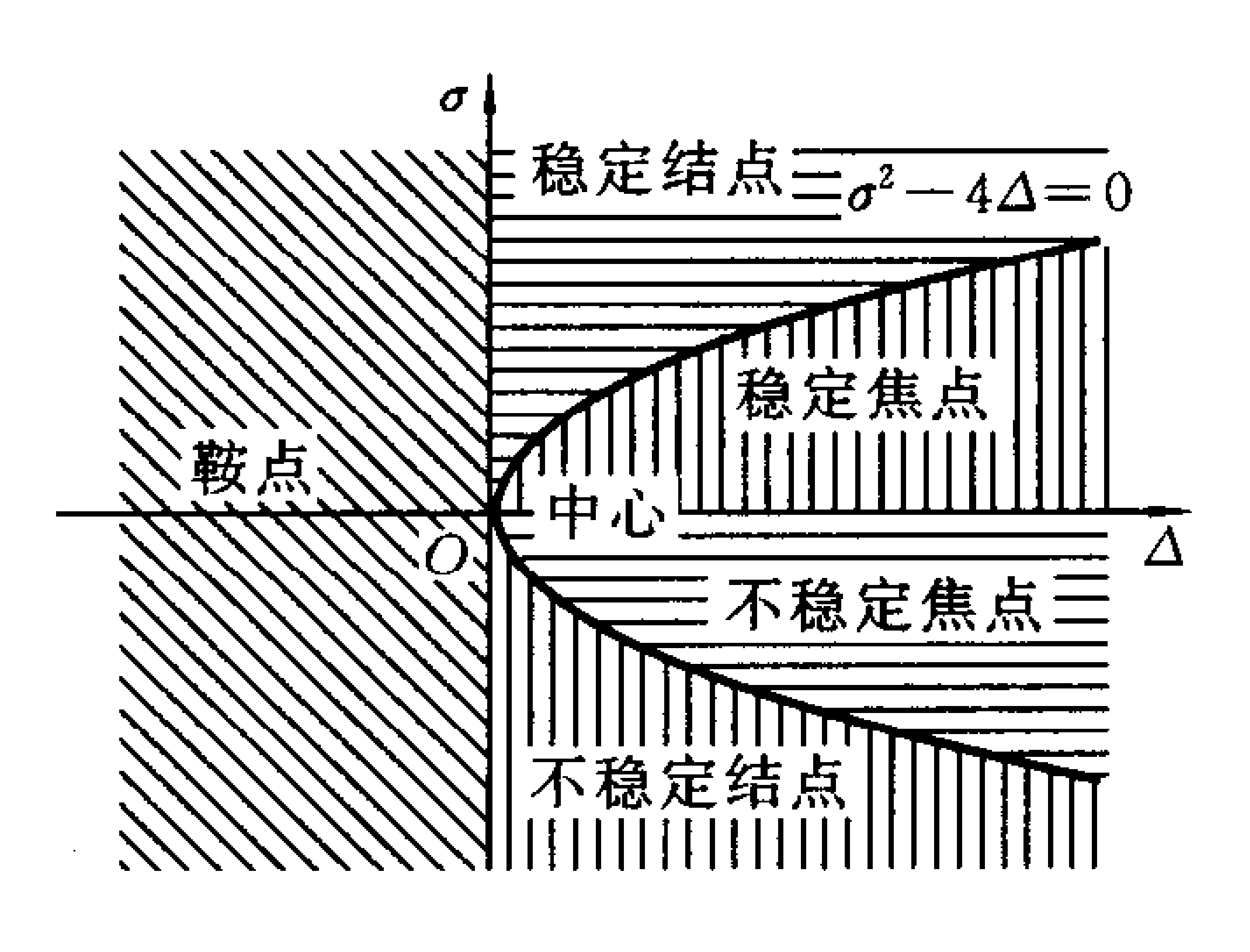


图5.1

4. **定理5.1** 如果在一次近似$\frac{dx}{dt}=a_{11}x+a_{12}y,\frac{dy}{dt}=a_{21}x+a_{22}y$中,有$\Delta=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq0$,且$O(0,0)$为其结点(不包括退化结点及临界结点)、鞍点或焦点,又$\varphi(x,y)$与$\psi(x,y)$在$O(0,0)$的邻域连续可微,且满足

$$\lim_{x^2+y^2\to0}\frac{\varphi(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0,\quad \lim_{x^2+y^2\to0}\frac{\psi(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0,$$

则系统①的轨线在$O(0,0)$附近的分布与系统③的完全相似.

注 这里$\varphi(x,y)$与$\psi(x,y)$称为摄动,是将系统①改写为

$$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=a_{11}x+a_{12}y+\varphi(x,y),\\ \frac{dy}{dt}=a_{21}x+a_{22}y+\psi(x,y)\end{cases}$$

时所得到的,其中,$a_{11}=P'_x(0,0)$,$a_{12}=P'_y(0,0)$,$a_{21}=Q'_x(0,0)$,a_{22}

$=Q'_y(0,0)$.

疑难解析

1. 怎样理解自治系统与非自治系统?

答 给定一个微分方程组$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}=f(t,X)$,可以把它看做是一个运动系统的数学描述,$t$ 理解为时间,X 理解为相空间内动点的坐标,则微分方程组$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}=f(t,X)$在相空间的域 D 内确定了一个向量场(速度场). 如果f 不显含t,微分方程组成为$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}=f(X)$,在相空间的域 D 中所确定的向量场不随时间 t 而改变,是一个稳定场(定常场). 相应的方程组$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}=f(X)$称为定常系统或自治系统. 若$f$ 显含t,则向量场随时间t 改变,是一个时变场(非定常场),方程组$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}=f(t,X)$称为非定常系统或非自治系统,也称为时变系统.

从几何上看,自治系统在相空间的域D 内,动点无论在什么时刻过点 X_0 时,它的运动都沿确定的方向,即向量 $\boldsymbol{f}(X_0)$的方向前进. 而非自治系统在相空间的域D 内,动点在不同的时刻从同一点 X_0 可能沿不同的方向继续前进. 即前者在 X_0 确定一个唯一的向量$\boldsymbol{f}(X_0)=(f_1(X_0),f_2(X_0),\cdots,f_n(X_0))^{\mathrm{T}}$,而后者在 X_0 确定无穷多个向量$\boldsymbol{f}(t,X_0)=(f_1(t,X_0),f_2(t,X_0),\cdots,f_n(t,X_0))^{\mathrm{T}}$,向量可能因$t$ 不同而不同. 当解的存在唯一性定理条件满足时,在增广相空间内,不论是自治系统还是非自治系统,它们的积分曲线都不会相交. 但是,在相空间内,自治系统的轨线不会相交;而非自治系统的轨线却可能相交. 这是自治系统与非自治系统最本质的差异.

由于本书只介绍二阶线性系统,所以相空间即为相平面,$f(t,X)$即为$P(t,x,y)$与$Q(t,x,y)$.

2. 怎样理解奇点的概念？

答 若存在点$X_0\in D$,使得$\boldsymbol{f}(X_0)=\boldsymbol{0}$(零向量).(在二阶线性系统中,即存在$(x_0,y_0)$,使$P(x_0,y_0)=0,Q_0(x_0,y_0)=0$),则称$X_0$(即$(x_0,y_0)$)为自治系统的一个平衡位置,也称为此系统的一个奇点.

若X_0是自治系统的一个平衡位置,则$X=X_0$是此系统的一组常数解. 它在增广相空间中表示一条与t轴平行的直线,该直线在相空间内的投影就是点X_0,此点不随时间t而变化,所以称为平衡位置. 求平衡位置,即求方程$f(X)=\boldsymbol{0}$的根,平衡位置本身也是一条特殊的轨线.

当动点沿轨线移动时,在任何有限时间内都不可能到达奇点(平衡位置),否则将与解的唯一性相矛盾. 故而轨线仅当$t\to\infty$时趋向奇点. 且可证明,若$\lim\limits_{t\to\infty}X(t)=X_0,X_0\in D$,则$X_0$必为系统的奇点.

对于一个给定的自治系统,轨线在奇点附近的分布情况多种多样,是对自治系统进行研究的重要内容之一.

注 对于方程组①,xOy平面(即空间R^2)称为相空间(相平面). 而空间$R\times R^2$称为增广相空间(增广相平面). 其中R^2是点(x,y)所在的空间,$R\times R^2$是点(t,x,y)所在的空间.

方法、技巧与典型例题分析

本节要求能够确定方程的奇点类型,画出相图,轨线分布与稳定性.

讨论奇点附近轨线的定性分析方法有如下几种.

(1) 特征向量方法. 在求$\boldsymbol{A}$的特征值的同时,求出对应特征向量,由此确定结点与鞍点情形的分界线及公切线. 这种方法适用于理论性证明,在实用时(尤其在判别公切线时)比较麻烦.

(2) 系数矩阵$\boldsymbol{A}$约当化方法. 即用相似变换化$\boldsymbol{A}$为约当标准形,共有以下四个类型

$$\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\lambda_1 & 1\\ 0 & \lambda_1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ -\beta & \alpha\end{pmatrix}.$$

对每一种约当标准形易求轨线的方程，并画出轨线. 但在相平面 xOy 上画相轨线仍很麻烦，特别是结点与鞍点情形的分界线与公切线，因而，这种方法实用性较差.

(3) 用形如 $bk^2+(a-d)k-c=0$ 的二次方程确定分界线，即由特殊点来决定轨线切线方向，从而求得公切线. 这种方法比较实用.

注 若线性系统 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=ax+by$，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=cx+dy$ 的系数矩阵 A 的特征值为 λ_1,λ_2. 则：

(i) 当 λ_1,λ_2 为异号的实数时，奇点 $(0,0)$ 为鞍点；

(ii) 当 λ_1,λ_2 为同号的实数时，奇点 $(0,0)$ 为结点.

当 λ_1,λ_2 为负实数时，奇点 $(0,0)$ 为稳定的结点；当 λ_1,λ_2 为正实数时，奇点 $(0,0)$ 为不稳定的结点. 当 $\lambda_1=\lambda_2$ 时，由 $k=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{c+dk}{a+bk}$，即 $bk^2+(a-d)k-c=0$ 的根的情形知：$(a-d)^2+4bc=0$ 时，奇点 $(0,0)$ 为退化结点；$a=d,b=c=0$ 时，奇点 $(0,0)$ 为临界结点. 当 $\lambda_1\neq\lambda_2$ 时，$bk^2+(a-d)k-c=0$ 有两个异根.

(iii) 当 λ_1,λ_2 为共轭复数（非纯虚数）时，奇点 $(0,0)$ 为焦点；当 λ_1,λ_2 的虚部为负时，奇点 $(0,0)$ 为稳定的焦点；当 λ_1,λ_2 的虚部为正时，奇点 $(0,0)$ 为不稳定的焦点.

(iv) 当 λ_1,λ_2 为共轭纯虚数时，奇点 $(0,0)$ 为中心.

例1 通过求解，确定下列方程的奇点类型，画出相图，并确定奇点的稳定性：

(1) $\begin{cases}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-2x,\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-3y;\end{cases}$ (2) $\begin{cases}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=3x,\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=x+3y;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y,\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-x;\end{cases}$ (4) $\begin{cases}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=5x+4y,\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=2x+7y.\end{cases}$

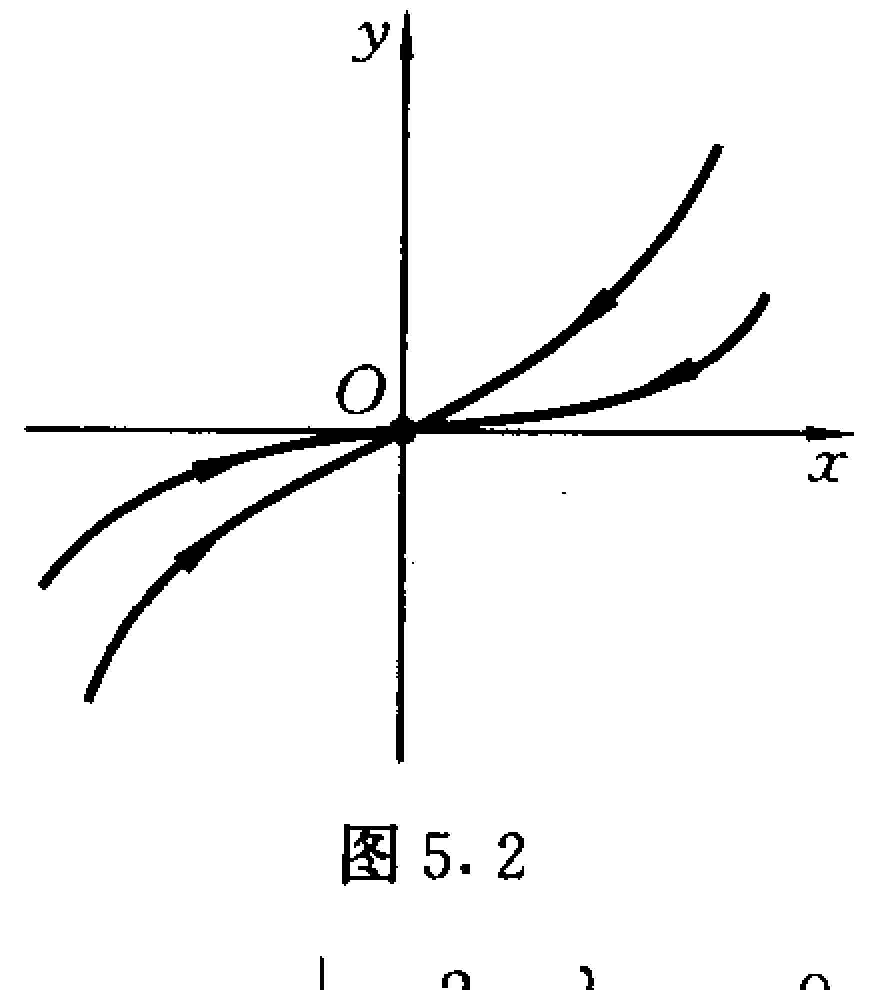


图 5.2

解 (1) 原方程化为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{3y}{2x}\Rightarrow\frac{\mathrm{d}y}{3y}=\frac{\mathrm{d}x}{2x}.$$

两端积分,得通解

$$y^2=C_1x^3\Rightarrow y=Cx^{3/2}.$$

故在 xOy 平面上的相图是图5.2所示的半立方抛物线族. 奇点 $O(0,0)$ 对应的特征方程为

$$\begin{vmatrix}-2-\lambda & 0\\ 0 & -3-\lambda\end{vmatrix}=(-2-\lambda)(-3-\lambda)=0,$$

特征根 $\lambda_1=-2,\lambda_2=-3$,是相异的两负实数,所以奇点 $O(0,0)$ 是稳定结点.

(2) 只有 $O(0,0)$ 满足方程

$$\begin{cases}3x=0,\\ x+3y=0,\end{cases}$$

所以 $O(0,0)$ 是系统的唯一奇点. 特征方程为

$$\begin{vmatrix}3-\lambda & 0\\ 1 & 3-\lambda\end{vmatrix}=(3-\lambda)^2=0.$$

特征根 $\lambda_{1,2}=3$,为相等的正实根,且 $(a-d)^2+4bc=0$,所以奇点 $O(0,0)$ 是不稳定退化结点.

方程改写为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{x+3y}{3x}=\frac{1}{3}+\frac{y}{x},$$

是一阶线性非齐次方程,求得轨线族

$$y=\mathrm{e}^{\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\left(\int\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)=x\left(\frac{1}{3}\ln x+C\right),$$

如图 5.3 所示.

(3) $O(0,0)$ 是唯一奇点. 特征方程为

$$\begin{vmatrix}-\lambda & 1\\ -1 & -\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+1=0,$$

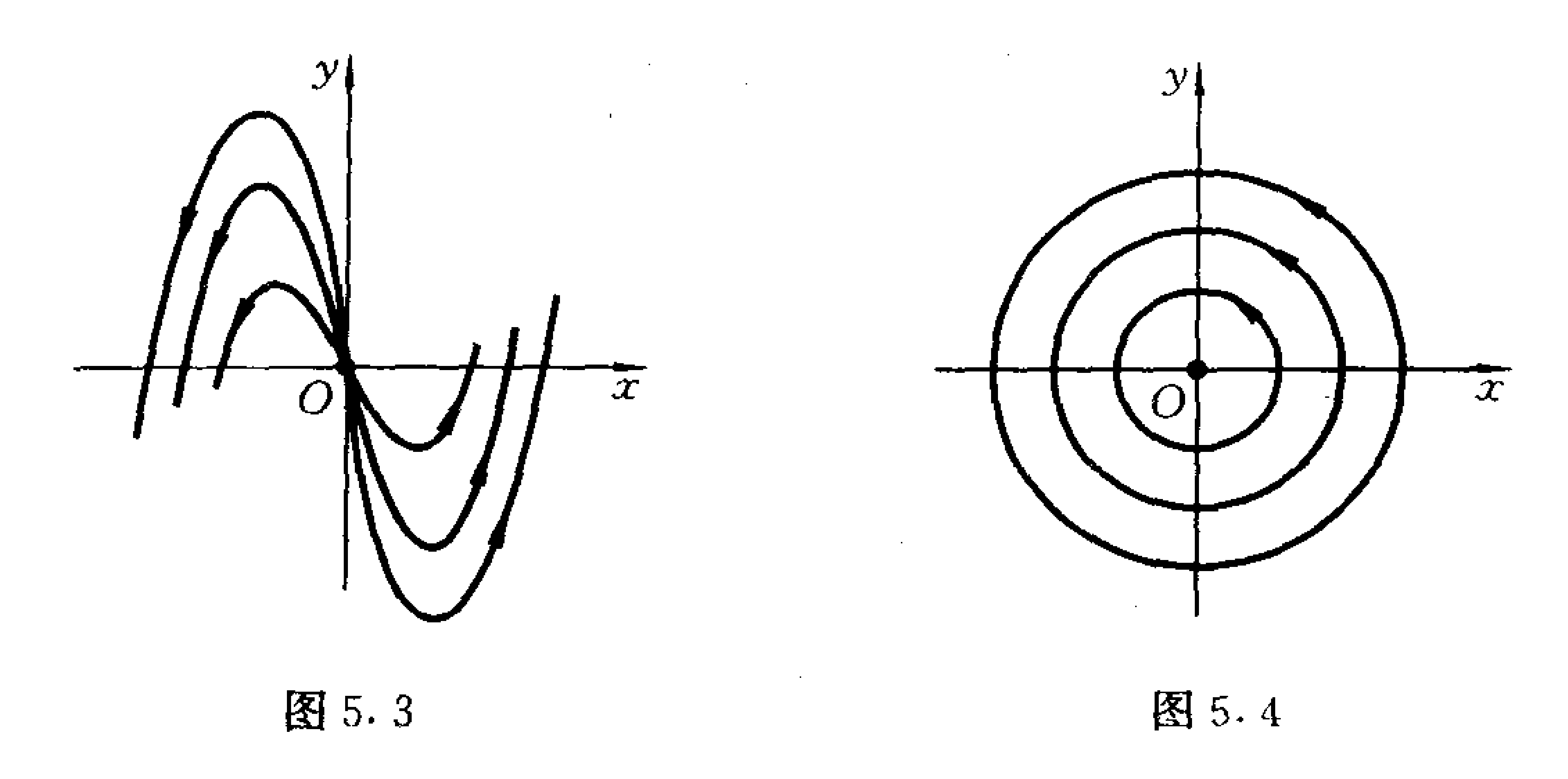


图 5.3　　　　图 5.4

特征根 $\lambda_{1,2}=\pm i$，所以奇点 $O(0,0)$ 为中心.

方程改写为 $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$，求得通解为

$$x^2+y^2=C.$$

所以，它在 xOy 平面上的相图是一族同心圆(图 5.4).

(4) 点 $O(0,0)$ 是唯一奇点. 特征方程为

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 2 & 7-\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2-12\lambda+27=0,$$

解得特征根为 $\lambda_1=3,\lambda_2=9$，从而是同为正号的相异实数，所以 $O(0,0)$ 是不稳定的结点.

λ_1 与 λ_2 对应的特征向量分别为 $(2,-1)^T,(1,1)^T$. 因而，由代数知识，令

$$\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{J}=\boldsymbol{TAT}^{-1}=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix},\quad 其中\quad \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 7 \end{pmatrix},$$

作变换

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

即
$$\begin{cases} \xi=2x+y, \\ \eta=-x+y. \end{cases}$$

原系统化为

$$\frac{d\xi}{dt}=3\xi,\quad \frac{d\eta}{dt}=9\eta.$$

因而 $2x+y=0$，$-x+y=0$ 也是原系统的轨线，其相图如图5.5所示.

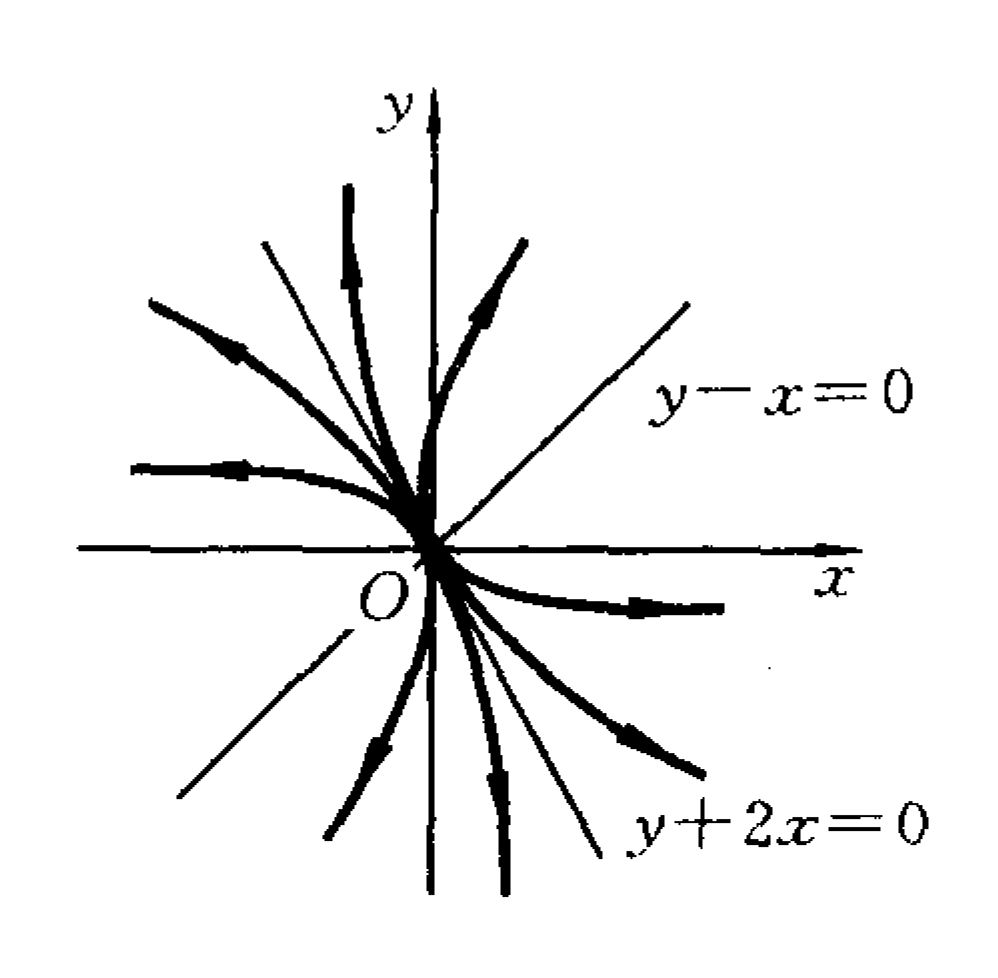


图5.5

例 2 确定下列方程的奇点类型，轨线分布及稳定性：

(1) $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=2x-y,\\ \dfrac{dy}{dt}=x;\end{cases}$

(2) $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x+3y,\\ \dfrac{dy}{dt}=-6x-5y;\end{cases}$ (3) $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-2x-5y,\\ \dfrac{dy}{dt}=2x+2y;\end{cases}$

(4) $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x,\\ \dfrac{dy}{dt}=2x-y.\end{cases}$

解 (1) 方程系数矩阵的特征方程为

$$\begin{vmatrix}2-\lambda & -1\\ 1 & -\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-2\lambda+1=0,$$

因而 $\sigma=-2$，$\Delta=1$，$\sigma^2-4\Delta=0$，故奇点 $O(0,0)$ 为不稳定的临界结点或退化结点.

由 $\dfrac{dy}{dt}=x$，故 $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{d^2y}{dt^2}$，从而

$$\frac{d^2y}{dt^2}=2\frac{dy}{dt}-y,$$

得 $$y=e^t(C_1t+C_2),\quad x=e^t(C_1t+C_1+C_2).$$

消去 t，得轨线方程为

$$y=(x-y)(\ln|x-y|+C).$$

轨线族如图5.6所示.

(2) 方程系数矩阵的特征方程为

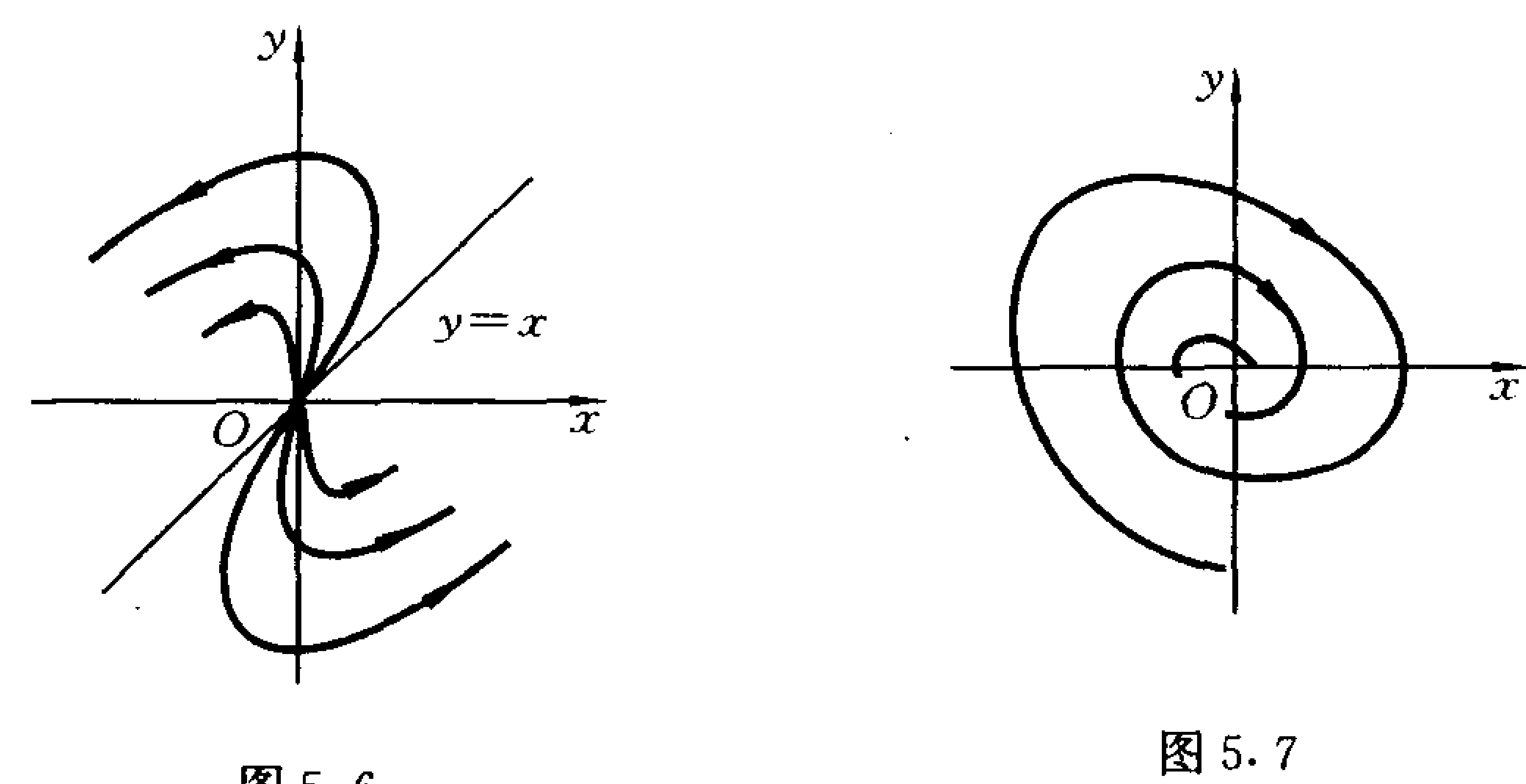


图 5.6　　　　图 5.7

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ -6 & -5-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2+4\lambda+13=0,$$

因而 $\sigma=4,\Delta=13,\sigma^2-4\Delta=-36<0$，知奇点 $O(0,0)$ 为系统的稳定焦点. 轨线分布如图 5.7 所示.

(3) 方程系数矩阵的特征方程为

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & -5 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2+6=0,$$

因而 $\sigma=0,\Delta=6>0,\sigma^2-4\Delta<0$，知奇点 $O(0,0)$ 为系统的中心. 由 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-2x-5y$ 可知，在第一象限的轨线，当 t 增加时 x 增大，轨线分布如图 5.8 所示.

(4) 方程系数矩阵的特征方程为

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2-1=0,$$

因而 $\sigma=0,\Delta<0,\sigma^2-4\Delta=4>0$，知奇点 $O(0,0)$ 为系统的鞍点.

先找到系统的直线轨线. 以 $y=kx$ 代入方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{2x-y}{x} \Rightarrow k=\frac{2x-kx}{x} \Rightarrow k=1,$$

知方程有直线解 $y=x$，由 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x$ 知，$x=0$ 也是一直线解. 系统的轨线分布如图 5.9 所示.

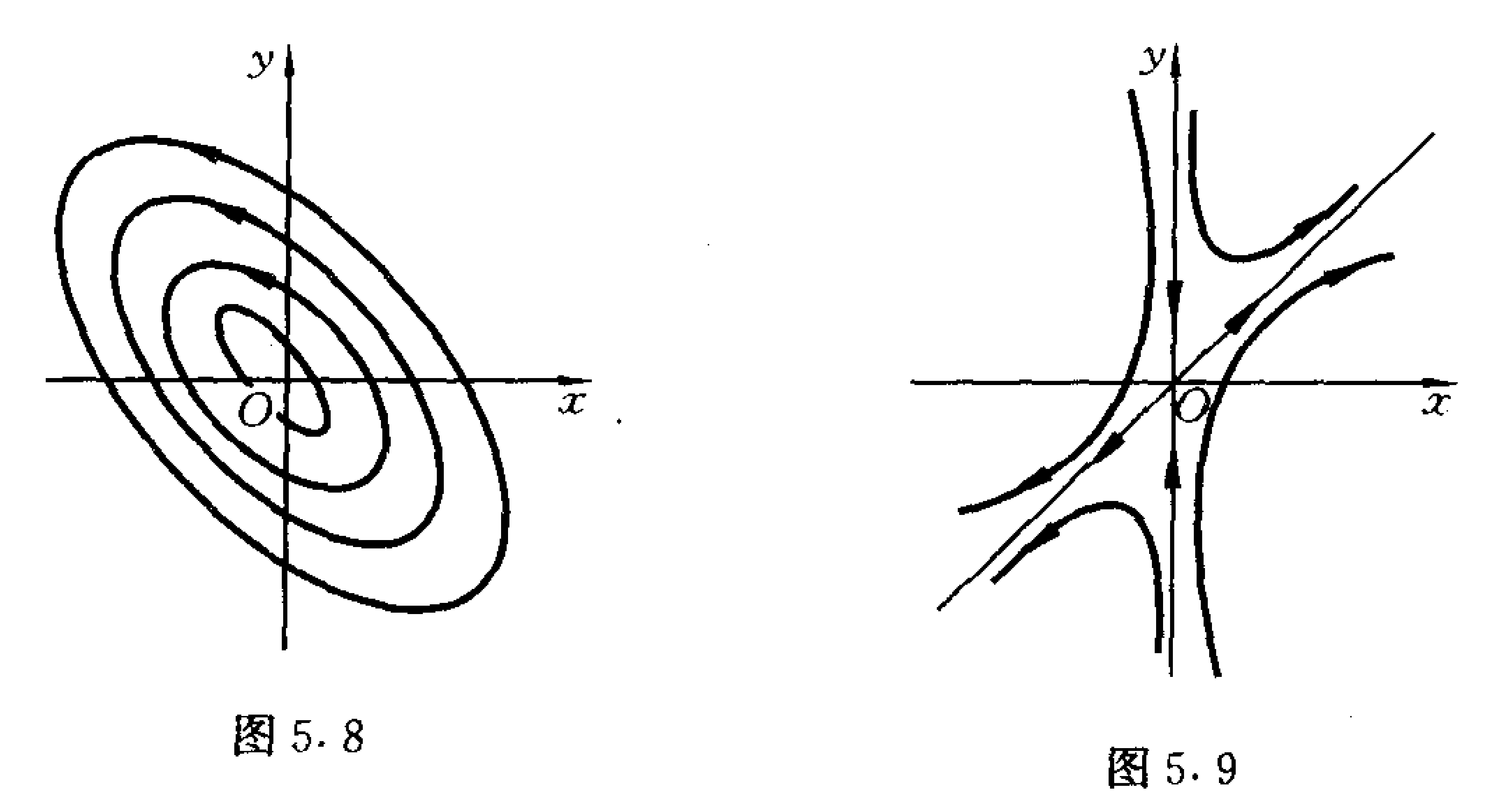


图 5.8　　图 5.9

例 3　确定下列方程的奇点类型、稳定性并画出轨线分布图.

(1) $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-3x-2y, \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=2x+y; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-2x+y, \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-x-2y; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=3x-2y, \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=4y-6x; \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y-2x, \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=2y-4x. \end{cases}$

解　(1) 系数矩阵的特征方程为

$$\begin{vmatrix} -3-\lambda & -2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2+2\lambda+1=0,$$

特征根$\lambda_{1,2}=-1$，故奇点$O(0,0)$是稳定的退化结点. λ_1 对应的特征向量是$(1,-1)$，所以直线 $x+y=0$ 也是原系统的轨线.

在 x 的正半轴上任取一点$(x,0)$，可求得$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=2x>0$，因而，轨线指向上方，如图 5.10 所示.

(2) 系数矩阵的特征方程为

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 \\ -1 & -2-\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2+4\lambda+5=0,$$

知$\sigma=4$，$\Delta=5$，$\sigma^2-4\Delta=-4<0$，所以奇点$O(0,0)$是系统的稳定焦点，轨线是一族环绕原点$O(0,0)$作无限旋转的螺线. 在y 的正半轴

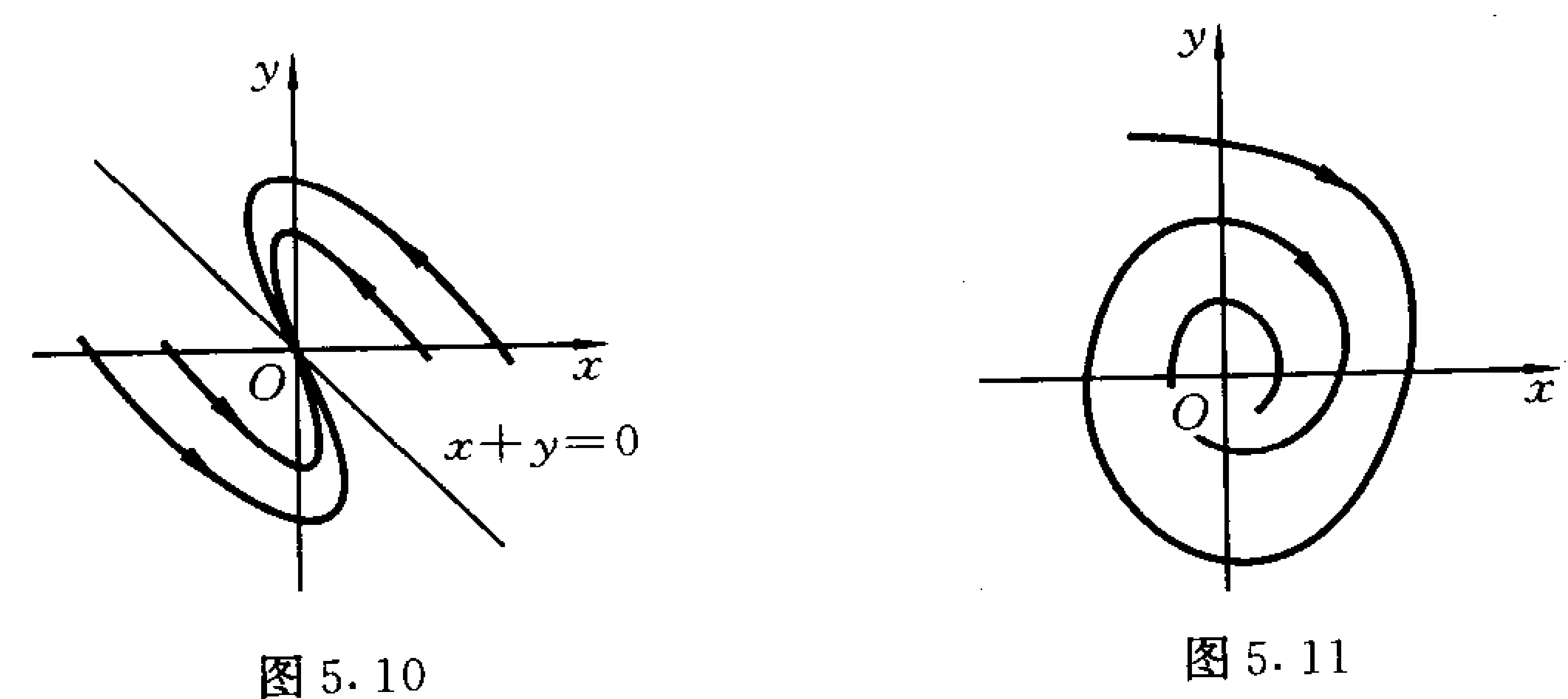


图 5.10　　　　图 5.11

上任取一点(0,y)，可求得$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y>0$，因而，轨线按顺时针方向旋转，如图 5.11 所示.

(3) 系数矩阵的特征方程为

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ -6 & 4-\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2-7\lambda=0,$$

知 $\sigma=-7$，$\Delta=0$，所以系统有无穷多个奇点. 由$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=3x-2y=0$知，直线 $y=3x/2$ 上所有点都是系统的奇点.

因为$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-2$，所以系统的轨线族方程为$y=-2x+C$，其轨线分布如图 5.12 所示.

(4) 系数矩阵的特征方程为

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 \\ -4 & 2-\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2-4+4=\lambda^2=0,$$

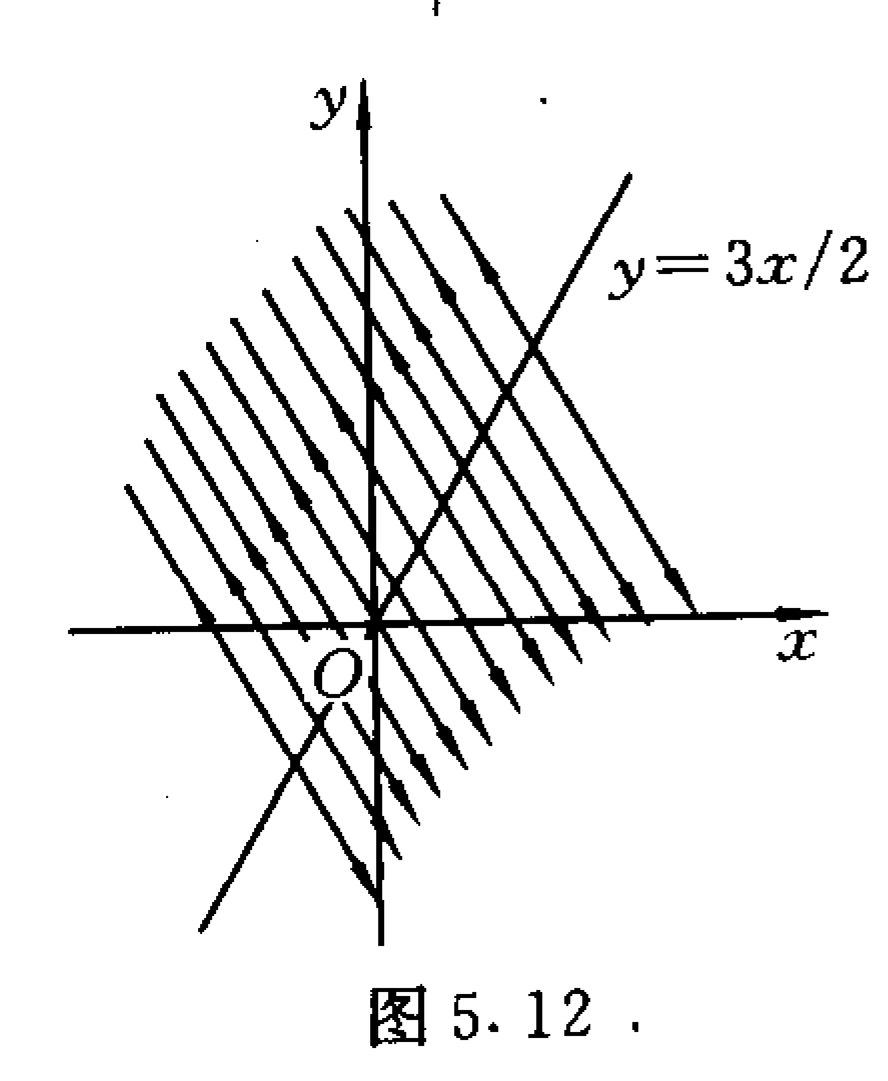


图 5.12

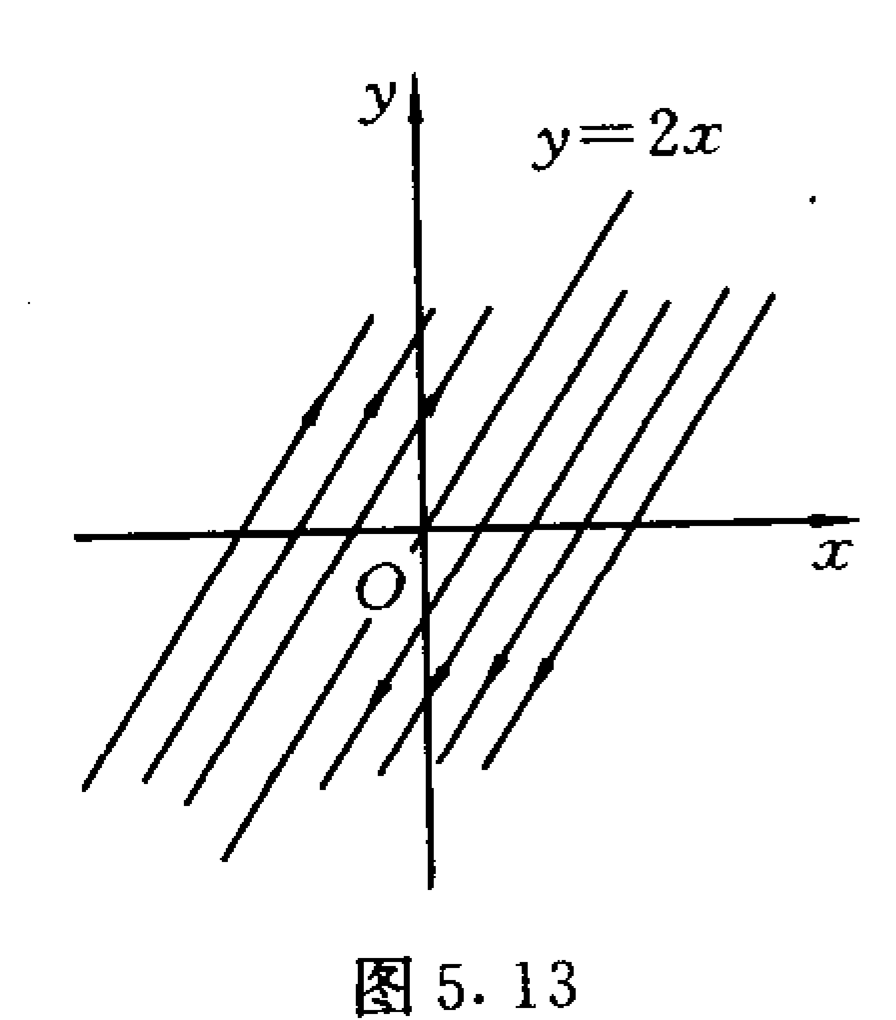


图 5.13

知 $\sigma=0,\Delta=0$，所以系统有无穷多个奇点. 由$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y-2x=0$知，直线 $y=2x$ 上所有点都是奇点.

因为$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2$，所以系统的轨线族方程为$y=2x+C$，系统的轨线分布如图 5.13 所示.

例 4 描出以下单摆方程的轨线：

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y,\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-\frac{g}{l}\sin x.\end{cases}$$

解 单摆方程是一个自治系统，方程化为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{g\sin x}{ly},$$

分离变量后两端积分，得 $y^2=\frac{2g}{l}\cos x+C$. 即单摆的轨线族方程，其轨线分布如图 5.14 所示.

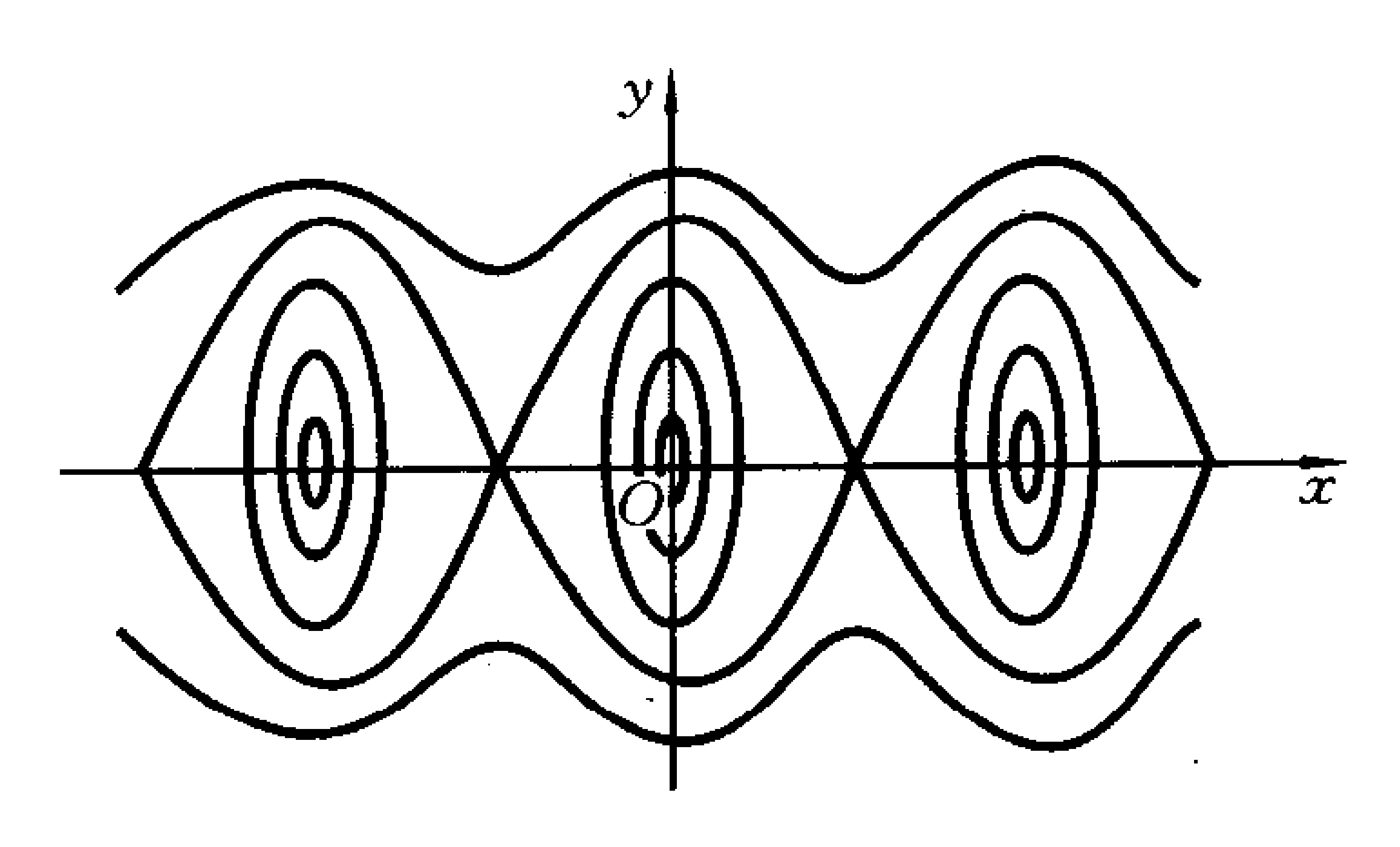


图 5.14

例 5 确定下列系统的奇点、稳定性并画出轨线分布图：

(1) $\begin{cases}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-x-5+y,\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-3x;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y,\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-2x-2y-5.\end{cases}$

解 (1) 由方程可求得点(0,5)是系统的唯一奇点. 作平移变

换：$\xi=x,\eta=y-5$. 方程组化为

$$\begin{cases}\dfrac{d\xi}{dt}=-\xi+\eta,\\ \dfrac{d\eta}{dt}=-3\xi,\end{cases} \tag{①}$$

则方程组①的奇点为$O(0,0)$.

方程组①的系数矩阵的特征方程为

$$\begin{vmatrix}-1-\lambda & 1\\ -3 & -\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+\lambda+3=0,$$

解得特征根$\lambda_{1,2}=\dfrac{1}{2}(-1\pm\sqrt{11}i)$，实部$-1/2<0$，故奇点$O(0,0)$为稳定的焦点. 所以原系统的奇点$(0,5)$为系统的稳定的焦点.

由方程组①得$\dfrac{d\eta}{d\xi}=\dfrac{-3\xi}{-\xi+\eta}$，是齐次方程，求得通解为

$$\eta^2-\xi\eta+3\xi^2=Ce^{-\frac{1}{\sqrt{11}}\arctan\frac{2\eta-\xi}{\sqrt{11}\xi}}.$$

代回原变量，得原系统的平面轨线族为

$$(y-5)^2-x(y-5)+3x^2=Ce^{-\frac{1}{\sqrt{11}}\arctan\frac{2y-x-10}{\sqrt{11}x}}.$$

其轨线分布如图5.15所示.

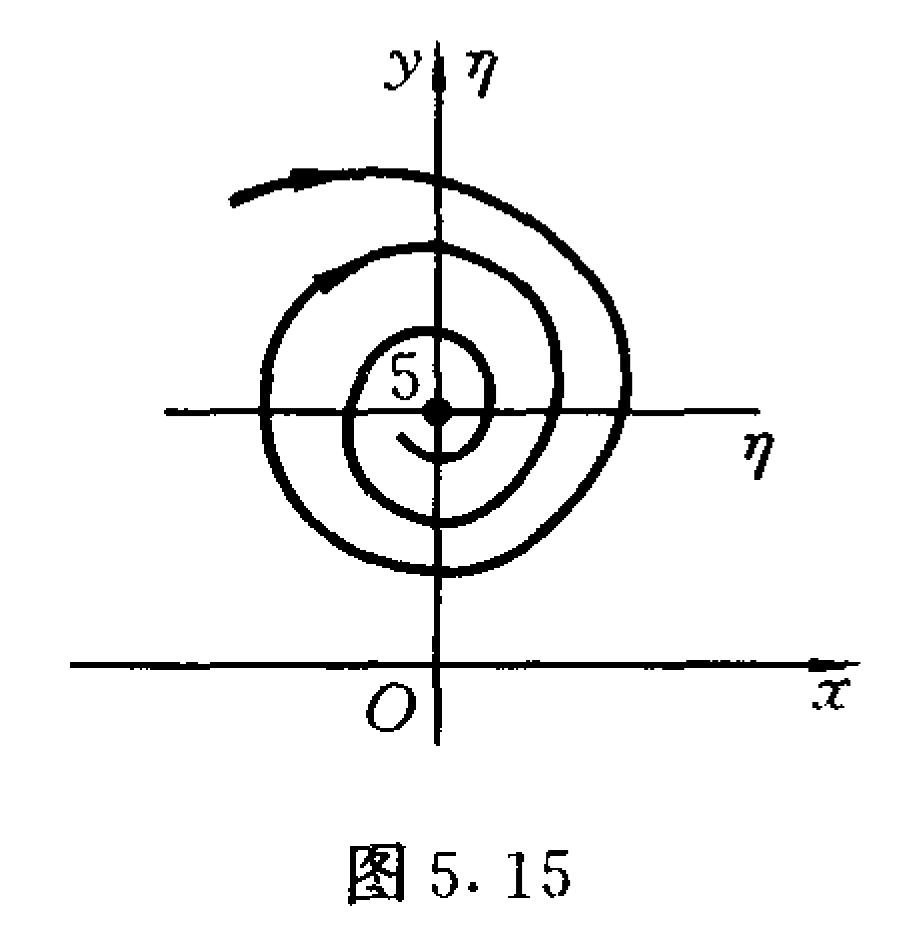


图5.15

(2) 由方程可求得点$(-5/2,0)$是系统的奇点. 作平移变换：$\xi=x+5/2,\eta=y$，方程组化为

$$\begin{cases}\dfrac{d\xi}{dt}=\eta,\\ \dfrac{d\eta}{dt}=-2\xi-2\eta,\end{cases} \tag{②}$$

则方程组②的奇点为$O(0,0)$.

方程组②的系数矩阵的特征方程为

$$\begin{vmatrix}-\lambda & 1\\ -2 & -2-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+2\lambda+2=0,$$

解得特征根 $\lambda_{1,2}=-1\pm i$，实部 $-1<0$，所以 $O(0,0)$ 为系统②的稳定奇点. 即奇点 $(-5/2,0)$ 是原系统的稳定焦点.

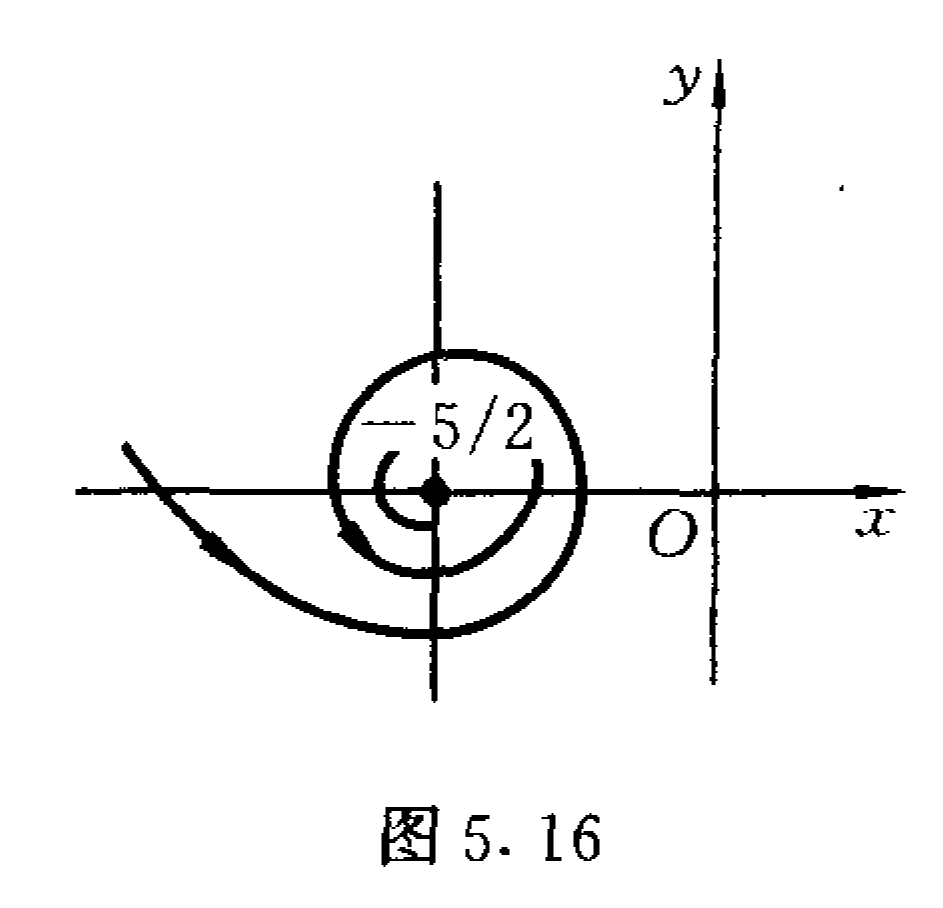


图 5.16

因为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{-2x-2y-5}{y}$，求解得系统的平面轨线族为

$$\left(x+y+\frac{5}{2}\right)^2+\left(x+\frac{5}{2}\right)^2=Ce^{2\arctan\frac{x+y+5/2}{x+5/2}}.$$

其轨线分布如图 5.16 所示.

例 6 确定下列系统的奇点与类型：

(1) $\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y,\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=x(a^2-x^2)+by\end{cases}\quad(ab\neq 0)$；

(2) $\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y,\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-ay-b\sin x\end{cases}\quad(a\geqslant 0,b>0)$.

解 本例的两个系统是非线性系统，依据定理 5.1，若方程有形式

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=a_{11}x+a_{12}y+\varphi(x,y),\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=a_{21}x+a_{22}y+\psi(x,y),\end{cases}\qquad ①$$

其中
$$a_{11}=P'_x(0,0),\quad a_{12}=P'_y(0,0),$$
$$a_{21}=Q'_x(0,0),\quad a_{22}=Q'_x(0,0).$$

当
$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\varphi(x,y)}{\rho}=0,\quad \lim_{\rho\to 0}\frac{\psi(x,y)}{\rho}=0\quad(\rho=\sqrt{x^2+y^2})$$
时，二阶线性系统是方程组①的一次近似，从而可以确定其奇点类型.

(1) 将方程写为

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y+\varphi(x,y),\\ \dfrac{dy}{dt}=a^2x+by+\psi(x,y),\end{cases}$$

其中$\varphi(x,y)=0,\psi(x,y)=-x^3$ 满足定理5.1条件，则一次近似系统为

$$\frac{dx}{dt}=y,\quad \frac{dy}{dt}=a^2x+by.$$

知$O(0,0)$是奇点. 系数矩阵的特征方程为

$$\begin{vmatrix}-\lambda & 1\\ a^2 & b-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-b\lambda-a^2=0,$$

解得特征根 $\lambda_{1,2}=\frac{1}{2}(b\pm\sqrt{b^2+4a^2})$，是异号的两实根. 故奇点$O(0,0)$是系统的鞍点，其相图如图5.17所示.

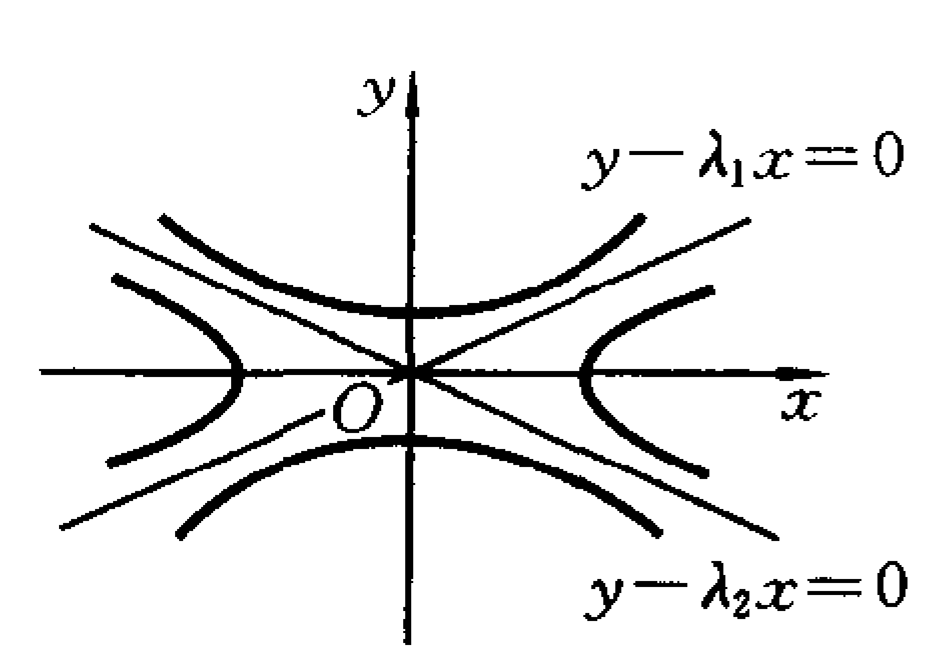


图5.17

(2) 将方程改写为

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y+\varphi(x,y),\\ \dfrac{dy}{dt}=-bx-ay+\psi(x,y),\end{cases}$$

其中$\varphi(x,y)=0,\psi(x,y)=bx-b\sin x$ 满足定理5.1条件，则方程的一次近似系统为

$$\frac{dx}{dt}=y,\quad \frac{dy}{dt}=-bx-ay.$$

系数矩阵的特征方程为

$$\begin{vmatrix}-\lambda & 1\\ -b & -a-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+a\lambda+b=0,$$

解得特征根 $\lambda_{1,2}=\frac{1}{2}(-a\pm\sqrt{a^2-4b})$.

(i) 当$a^2-4b\geqslant 0$时，奇点$O(0,0)$为稳定结点；

(ii) 当$a^2-4b<0$时，奇点$O(0,0)$为稳定焦点；

(iii) 当 $a=0$ 时，$\lambda_{1,2}=\pm\sqrt{b}\,\mathrm{i}$，奇点 $O(0,0)$ 为一次近似系统的中心. 奇点 $O(0,0)$ 可能为原系统的中心，也可能为焦点.

第二节　极限环举例

主要内容

定义 5.1　设系统

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=P(x,y),\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=Q(x,y)\end{cases}\qquad ①$$

具有闭轨线 C. 假如在 C 的充分小邻域中，除 C 之外，轨线全不是闭轨线，且这些非闭轨线当 $t\to+\infty$ 或 $t\to-\infty$ 时趋近于闭轨线 C，则说闭轨线是孤立的，并称之为系统①的一个**极限环**.

极限环 C 将相平面分为两个区域：**内域和外域**.

定义 5.2　如果在极限环 C 的内域靠近 C 的轨线当 $t\to+\infty$ $(-\infty)$ 时盘旋地趋近于 C，则称 C 是**内稳定的**（**内不稳定的**）；如果在极限环 C 的外域靠近 C 的轨线当 $t\to+\infty(-\infty)$ 时盘旋地趋近于 C，则称 C 是**外稳定的**（**外不稳定的**）；如果当 $t\to+\infty(-\infty)$ 时，C 的内部及外部靠近 C 的轨线都盘旋地趋近于 C，则称 C 是**稳定的**（**不稳定的**）；如果当 $t\to+\infty(-\infty)$ 时，C 的内部与外部的稳定性相反，则称 C 是**半稳定的**.

疑难解析

1. 研究极限环有何意义？

答　系统 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=P(x,y)$，$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=Q(x,y)$ 存在稳定的极限环相当于系统存在如下的周期解：

$$x=x_0(t),\quad y=y_0(t).$$

对于那些初值与这个解很接近的解 $x=x(t),y=y(t)$，当 $t\to+\infty$ 时，后者的轨线盘旋地趋近于前者的轨线. 而周期解问题在机械振动、无线电技术和生态学等很多领域中是十分重要的. 因此，极限环的研究有着广泛的应用.

2. 怎样判定极限环的存在？

答 极限环存在与否的一般判定方法是：

环域定理 设有平面系统 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=P(x,y),\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=Q(x,y)$，其中 $P(x,y),Q(x,y)$ 为 x,y 的连续函数，且系统满足唯一性条件. 若存在闭曲线 C_1,C_2 围成区域 G，且过曲线 C_1 与 C_2 上各点的轨线，都是由 G 的外部进入内部(由 G 的内部进入外部)(图 5.18)，则在 G 内至少存在一个外稳定环和一个内稳定环(一个外不稳定环和一个内不稳定环). 如果二者合成一个，则系统至少存在一个稳定环(不稳定环).

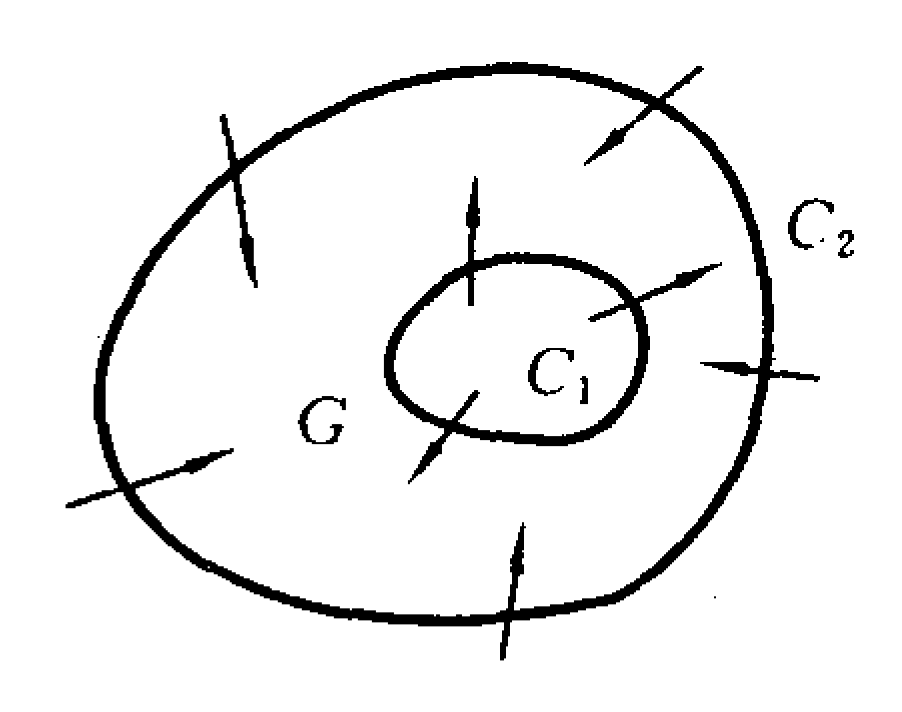


图 5.18

推论 若在闭曲线 C 内，系统只有一个不稳定奇点(稳定奇点)，且过曲线 C 上各点的轨线都由 C 的外部进入 C 的内部(由 C 的内部进入 C 的外部)，则在 C 的内部至少存在一个外稳定环和一个内稳定环(一个外不稳定环和一个内不稳定环). 如果二者合成一个，则系统至少存在一个稳定环(不稳定环).

通过环域定理可知，对于一个给定的系统若能构造出满足定理条件的环域，则可以肯定该系统存在极限环.

方法、技巧与典型例题分析

例 1 设有方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x+y-1-(x-1)^3-(x-1)y^2,\\ \dfrac{dy}{dt}=-x+y+1-(x-1)^2y-y^3,\end{cases}$$

(1) 确定奇点的位置及其类型；

(2) 找出极限环并判定其稳定性；

(3) 作出相图.

解 (1) 令$\dfrac{dx}{dt}=0,\dfrac{dy}{dt}=0$,解得奇点为$(1,0)$. 作平移变换$\xi=x-1,\eta=y$,则方程组改写为

$$\begin{cases}\dfrac{d\xi}{dt}=\xi+\eta-\xi(\xi^2+\eta^2),\\ \dfrac{d\eta}{dt}=-\xi+\eta-\eta(\xi^2+\eta^2),\end{cases} \qquad ①$$

其一次近似为

$$\begin{cases}\dfrac{d\xi}{dt}=\xi+\eta,\\ \dfrac{d\eta}{dt}=-\xi+\eta.\end{cases} \qquad ②$$

方程组②的系数矩阵的特征方程为

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & 1\\ -1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-2\lambda+2=0,$$

解得$\lambda_{1,2}=1\pm i$,所以$(0,0)$为不稳定焦点,即奇点$(1,0)$为原系统的不稳定焦点.

(2) 将方程组①化为极坐标系下的方程组.

由
$$\begin{cases}\xi\dfrac{d\xi}{dt}=\xi^2+\xi\eta-\xi^2(\xi^2+\eta^2),\\ \eta\dfrac{d\eta}{dt}=-\xi\eta+\eta^2-\eta^2(\xi^2+\eta^2),\end{cases}$$

得
$$\frac{1}{2}\frac{dr^2}{dt}=\xi\frac{d\xi}{dt}+\eta\frac{d\eta}{dt}=r^2(1-r^2),$$

即
$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=r(1-r^2).$$

类似地，由$\theta=\arctan(\eta/\xi)$得
$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=-\frac{1}{\xi^2}\left(\xi\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t}-\eta\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t}\right)=-1.$$

从而解得孤立的闭轨线——极限环为$r=1$. 当$r<1$时，有$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}>0$；当$r>1$时，有$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}<0$，则单位圆周$r=1$邻域内的轨线当$t\to+\infty$时，均趋近于$r=1$，故极限环$r=1$是稳定的极限环.

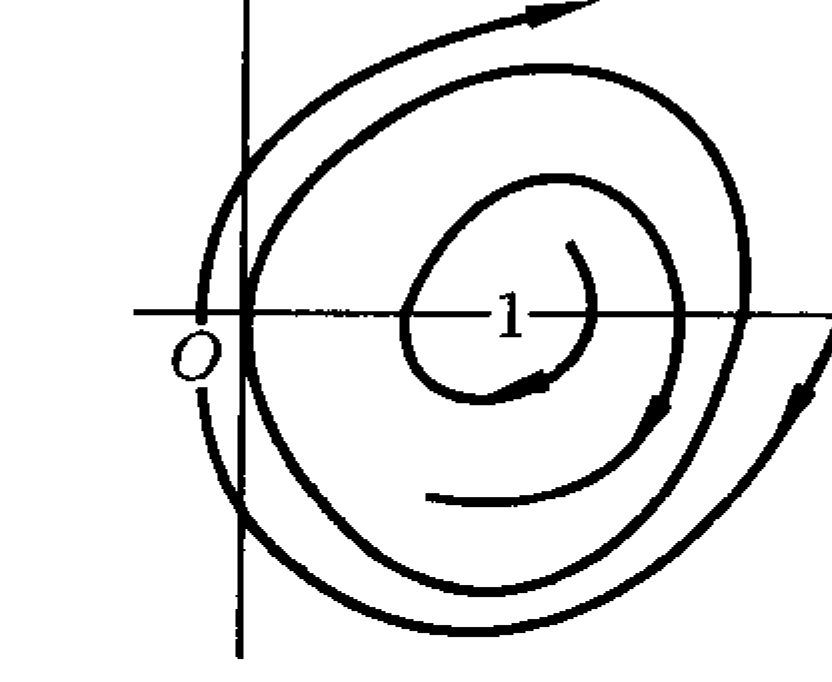


图 5.19

(3) 相图大致如图 5.19 所示.

例 2 确定方程组
$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}[1-(x^2+y^2)],\\[2ex]\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-x+\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}[1-(x^2+y^2)]\end{cases}\qquad ①$$
的极限环及其稳定性.

解 作极坐标变换：$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，则
$$r^2=x^2+y^2,$$
$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=\cos\theta\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\sin\theta\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}.\qquad ②$$
将式①的右端代入式②，得
$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=1-r^2,\qquad ③$$

由$\theta=\arctan\dfrac{y}{x}$，得
$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\left(x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}-y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)\Big/(x^2+y^2).\qquad ④$$
将式①的右端代入式④，得

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=-1. \tag{5}$$

则原方程组经极坐标代换后化为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=(1-r^2),\\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=-1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}r=1,\\ \theta=\theta_0-t.\end{cases}$$

$r=1$ 即 $x^2+y^2=1$ 是唯一的闭轨，$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}<0$. 因为 $t\to\infty$ 时，总有 $\lim\limits_{t\to\infty}r(t)=1$，所以 $r=1$ 是稳定的极限环.

例 3 确定方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-y+x(x^2+y^2-1),\\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=x+y(x^2+y^2-1)\end{cases} \tag{1}$$

的极限环及其稳定性.

解 作极坐标变换：$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$，则

$$r^2=x^2+y^2,$$

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=\cos\theta\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\sin\theta\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}. \tag{2}$$

将式①右端代入式②，得

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=-r(r^2-1).$$

由 $\theta=\arctan\frac{y}{x}$，得

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\left(x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}-y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)\Big/(x^2+y^2).$$

将式①右端代入，得

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=1.$$

原方程组经极坐标变换化为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=-r(r^2-1),\\ \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=1,\end{cases}\tag{③}$$

解得$r=1,\theta=t-\theta_0$. 第一个特解是奇点$O(0,0)$,第二个特解是圆$x^2+y^2=1$. 即式③的通解

$$r^2=\frac{C}{C+\mathrm{e}^{-2t}},\quad \theta=t-t_0\tag{④}$$

不是闭轨,故$r=1$是系统的极限环.

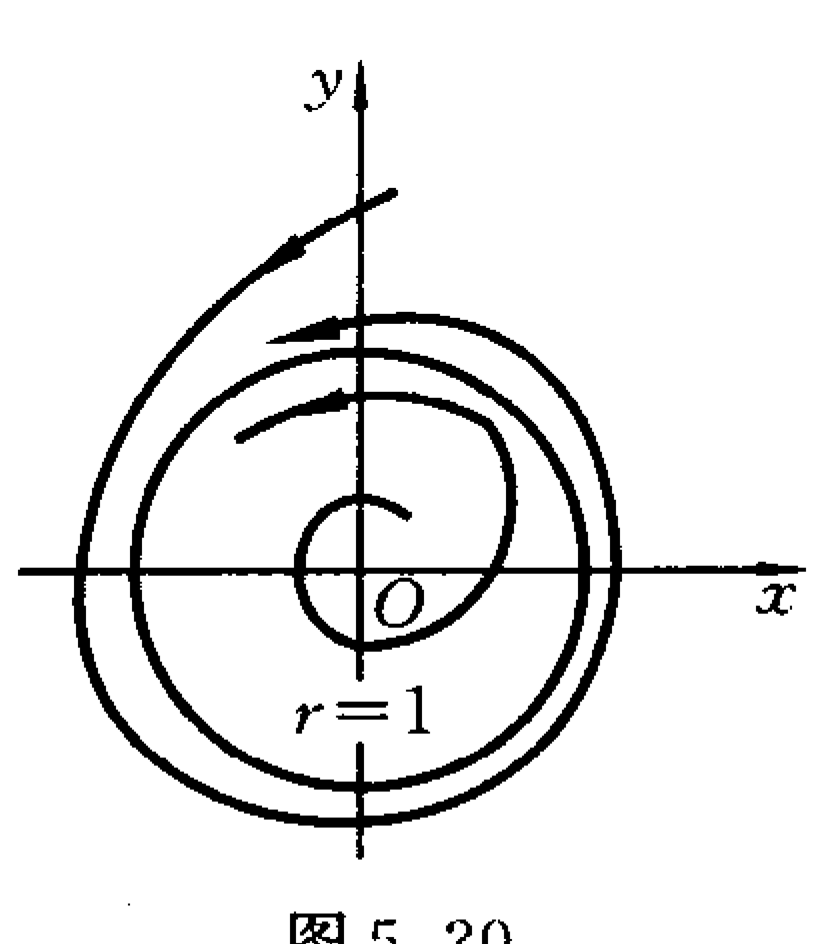


图5.20

对轨线族③,当$r>1$时,$\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}<0$,即$t\to+\infty$时,$r\to1$;当$r<1$时,$\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}>0$,即$t\to-\infty$时,$r\to1$. 而$\theta(t)=t-t_0$,当$t\to+\infty$时,$\theta(t)\to+\infty$,即当$t\to+\infty$时,$r=1$两侧的轨线都盘旋趋近于1,所以$x^2+y^2=1$是稳定的极限环. 其相图如图5.20所示.

例4 确定方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-y+x(x^2+y^2)\sin\dfrac{\pi}{\sqrt{x^2+y^2}},\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=x+y(x^2+y^2)\sin\dfrac{\pi}{\sqrt{x^2+y^2}}\end{cases}\tag{①}$$

的极限环并确定其稳定性.

解 作极坐标变换:$x=r\cos\theta,y=r\sin\theta$,则

$$r^2=x^2+y^2,\quad \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=\cos\theta\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\sin\theta\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},$$

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\left(x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}-y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)\Big/(x^2+y^2).$$

将①式代入,原方程组可化为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=r^3\sin\dfrac{\pi}{r},\\ \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=1.\end{cases}$$

可知，每个圆周$C_n: r=\frac{1}{n}$ $(n=1,2,\cdots)$都是极限环．当$r>1$时，$\frac{dr}{dt}>0$；当$\frac{1}{2m}<r<\frac{1}{2m-1}$时$(m=1,2,\cdots)$，$\frac{dr}{dt}<0$；当$\frac{1}{2m+1}<r<\frac{1}{2m}$时$(m=1,2,\cdots)$，$\frac{dr}{dt}>0$．由于$\theta=t+\theta_0$，$t\to+\infty(-\infty)$时，$\theta(t)\to+\infty(-\infty)$，所以在相邻的两个$C_n$和$C_{n+1}$之间的每条轨线当$t\to\pm\infty$时，分别盘旋趋近于这两条闭轨线．其中$C_1$是稳定的，$C_2$是不稳定的……即$C_n$的稳定性与不稳定性是间隔着排列的．

例5 确定方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-y-x(\sqrt{x^2+y^2}-1)(\sqrt{x^2+y^2}-2),\\ \dfrac{dy}{dt}=x-y(\sqrt{x^2+y^2}-1)(\sqrt{x^2+y^2}-2)\end{cases} \qquad ①$$

的极限环并确定其稳定性．

解 作极坐标变换：$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，则

$$r^2=x^2+y^2,\quad \frac{dr}{dt}=\cos\theta\frac{dx}{dt}+\sin\theta\frac{dy}{dt},$$

$$\frac{d\theta}{dt}=\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)\Big/(x^2+y^2).$$

将式①代入，原方程组可化为

$$\begin{cases}\dfrac{dr}{dt}=-r(r-1)(r-2),\\ \dfrac{d\theta}{dt}=1,\end{cases} \qquad ②$$

解得$r=0$，$r=1$，$r=2$．方程组通解为

$$\begin{cases}r(t)=1\pm\dfrac{|r_0-1|}{\sqrt{(r_0-1)^2-r_0(r_0-2)e^{-2t}}},\\ \theta(t)=t+\theta_0,\end{cases}$$

其中$r_0=r(0)$，$\theta_0=\theta(0)$．从而知原系统有两条极限环$r=1$，$r=2$．

由$\lim\limits_{t\to+\infty}\theta(t)=+\infty$，$\lim\limits_{t\to-\infty}\theta(t)=-\infty$，以及

当$0<r_0<1$时，$\lim\limits_{t\to+\infty} r(t)=0$，$\lim\limits_{t\to-\infty} r(t)=1$；

当$1<r_0<2$时，$\lim\limits_{t\to+\infty} r(t)=2$，$\lim\limits_{t\to-\infty} r(t)=1$；

当$r_0>2$时，$\lim\limits_{t\to+\infty} r(t)=2$，

故知$r=1$是不稳定极限环，$r=2$是稳定极限环.

例6 确定下列系统是否存在极限环，并讨论其稳定性.

(1) $\dfrac{dr}{dt}=r(r-1)^2,\dfrac{d\theta}{dt}=1$；

(2) $\dfrac{dr}{dt}=r(r-1)(r-2),\dfrac{d\theta}{dt}=1$；

(3) $\dfrac{dr}{dt}=\sin r,\dfrac{d\theta}{dt}=1$.

解 本例中三题都是极坐标方程.

(1) 系统有两个常数解：$r=0,r=1$，它们分别对应奇点$O(0,0)$与闭轨$x^2+y^2=1$.

由系统知，当$r\neq 0,1$时，$\dfrac{dr}{dt}>0$. 又由$\dfrac{d\theta}{dt}=1$知，$\theta=t+C$. 所以，除奇点$O(0,0)$与闭轨$x^2+y^2=1$外，所有轨线在t增大时，向径逐渐增大，同时按逆时针方向盘旋.

下面来证明：当$t\to+\infty$时，$x^2+y^2=1$的内部轨线当$t\to+\infty$时，以单位圆$C:x^2+y^2=1$为其极限点集.

用反证法. 设闭轨C内部的一条轨线为$\Gamma:r=r(t),\theta=\theta(t)$，有$t=t_0,r=r_0(r_0<1),\theta=\theta_0$.

如果当$t\to+\infty$时，$r\to r_1(r_1<1)$，则由于$r=r(t)$是递增函数，所以当t由t_0增加到无穷大时，r由r_0增加到r_1. 因此$\dfrac{dr}{dt}=r(r-1)^2$在$t:[t_0,+\infty)$上必有$\dfrac{dr}{dt}>k(k>0)$. 在$[t_0,t]$上积分，有

$$\int_{t_0}^{t}\frac{dr}{dt}dt>\int_{t_0}^{t}kdt,$$

解得 $r(t)-r_0>k(t-t_0)$ 或 $r(t)>r_0+k(t-t_0)$.

当$t\to+\infty$时，$r(t)\to r_1$，$r_0+k(t-t_0)\to+\infty$，导出矛盾. 从而

知，当$t\to+\infty$时，$r\to1$.

所以，孤立闭轨$C:x^2+y^2=1$是内稳定外不稳定的极限环.

(2) 系统有三个常数解：$r=0,r=1,r=2$，分别对应轨线：奇点$O(0,0)$，闭轨$C_1:x^2+y^2=1$，闭轨$C_2:x^2+y^2=4$.

因为$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=1$，所以系统所有的轨线(除奇点$O(0,0)$外)都按逆时针方向盘旋.

在C_1内部的轨线，由于$r<1$，有$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}>0$，从而当$t\to+\infty$时，$C_1$内部的轨线都以$C_1$为极限点集.

在C_1与C_2之间的轨线，由于$1<r<2$，有$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}<0$，从而当$t\to+\infty$，$C_1$与$C_2$之间的轨线以$C_1$为极限点集；当$t\to-\infty$时，$C_1$与$C_2$之间的轨线以$C_2$为极限点集.

在C_2外部的轨线，由于$r>2$，所以$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}>0$，从而当$t\to-\infty$时，以$C_2$为极限点集.

综上所述可知，$C_1:x^2+y^2=1$为系统的稳定环；$C_2:x^2+y^2=4$为系统的不稳定环.

(3) 因为$r\geqslant0$，所以系统有常数解$0,\pi,3\pi,\cdots,(2n+1)\pi,\cdots$，对应这些常数解系统，分别存在闭轨：奇点$O(0,0)$，$C_1:x^2+y^2=\pi^2$，$C_2:x^2+y^2=(3\pi)^2,\cdots,C_n:x^2+y^2=(2n+1)^2\pi^2,\cdots$.

由$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$在各$C_i(i=1,2,\cdots)$内外的符号可知，$C_1$为稳定环，$C_2$为不稳定环……稳定环与不稳定环相互间隔.

例7 有极坐标方程$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=f(r),\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=1$. 若$f(r)$为连续函数，试确定$f(r)$满足什么条件时，方程存在极限环，且分别为稳定环、不稳定环及半稳定环.

解 由给定的极坐标方程来讨论.

如果$f(r_0)=0(r_0>0)$，则闭轨$C:x^2+y^2=r_0^2$可能是下面几种

极限环：

(1) 若在 r_0 的邻域内，当 $r<r_0$ 时，有 $f(r)>0$，当 $r>r_0$ 时，有 $f(r)<0$，则闭轨 C 为稳定环.

(2) 若在 r_0 的邻域内，当 $r<r_0$ 时，有 $f(r)<0$，当 $r>r_0$ 时，有 $f(r)>0$，则闭轨 C 为不稳定环.

(3) 若在 r_0 的邻域内，当 $r<r_0$ 时，有 $f(r)<0(>0)$，当 $r>r_0$ 时，有 $f(r)<0(>0)$，则闭轨 C 为半稳定环，是内不稳定外稳定（内稳定外不稳定）的极限环.

例 8 设系统 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=P(x,y)$，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=Q(x,y)$，其中 $P(x,y)$，$Q(x,y)$ 在区域 G 上有连续偏导数，Γ 为系统在 G 上的一条闭轨. 证明

$$\iint\limits_D\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0 \quad (D\text{ 为 }\Gamma\text{ 的内部区域}).$$

证 因为 Γ 是 G 上的一条闭曲线，D 为 Γ 围成的区域，则由数学分析中的格林(Green)公式

$$\oint_\Gamma Q\mathrm{d}x-P\mathrm{d}y=\iint\limits_D\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \quad ①$$

若 Γ：$x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$，$t\in[0,T]$，则必有

$$\mathrm{d}x=P[\varphi(t);\psi(t)]\mathrm{d}t, \quad \mathrm{d}y=Q[\varphi(t),\psi(t)]\mathrm{d}t.$$

代入式①左端，得

$$\oint_\Gamma Q\mathrm{d}x-P\mathrm{d}y=\int_0^T QP\mathrm{d}t-PQ\mathrm{d}t=0.$$

于是

$$\iint\limits_D\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

例 9（闭轨不存在性） 若在单连通域 G 上，系统 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=P(x,y)$，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=Q(x,y)$ 的右端函数 $P(x,y)$，$Q(x,y)$ 有连续偏导数 $\frac{\partial P}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial Q}{\partial y}$，且

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\geqslant 0 \quad (\text{或}\leqslant 0), \quad ①$$

但在任何二维子区域上都恒不为零，则系统$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=P(x,y)$，$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=Q(x,y)$在区域$G$内不存在闭轨.

证 用反证法. 设系统在G内存在闭轨L，L围成区域D，则$D\subseteq G$，依格林公式

$$\oint_{\Gamma} P\mathrm{d}y-Q\mathrm{d}x=\iint_{D}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \qquad ②$$

由于Γ是闭轨：$x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$，$t\in[0,T]$，故

$$\oint_{\Gamma} P\mathrm{d}y-Q\mathrm{d}x=\int_0^T[P(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t)-Q(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t)]\mathrm{d}t,$$

但L是轨线，必有

$$\varphi'(t)=P[\varphi(t),\psi(t)], \quad \psi'(t)=Q[\varphi(t),\psi(t)],$$

所以，代入上式，即得

$$\oint_{\Gamma} P\mathrm{d}y-Q\mathrm{d}x=\int_0^T(PQ-QP)\mathrm{d}t=0.$$

又由题设$\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}\geqslant 0$（或$\leqslant 0$），从而

$$\iint_{D}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\neq 0.$$

故式②两端不等，推出矛盾. 故系统必不存在闭轨.

本命题又称本迪克森(Bendixson)定理.

例 10 设有方程

$$\ddot{x}+f(x)\dot{x}+g(x)=0, \qquad ①$$

若$f(x)$在$[a,b]$上不变号，且不恒为零，证明在区域$D:\{a\leqslant x\leqslant b, -\infty<y<+\infty\}$上，系统不存在闭轨.

证 方程①可化为方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y,\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-f(x)y-g(x),\end{cases}$$

即 $\quad P(x,y)=y, \quad Q(x,y)=-f(x)y-g(x),$

故 $$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}=-f(x)\neq 0,\quad 且不变号.$$

依例 9 结论知，系统①在 D 上不存在闭轨.

例 11（丢拉克(Dulac)定理） 系统：$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=P(x,y)$，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=Q(x,y)$在单连通域$G$ 上P、Q 有连续偏导数. 若在G 上存在连续可微函数 $B(x,y)$，使得

$$\frac{\partial(PB)}{\partial x}+\frac{\partial(QB)}{\partial y}$$

在G 上保持常号，且在G 的任何二维子域上不恒为零. 则例 10 中的系统①在G 上不存在闭轨及奇异闭轨.

证 考虑系统

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=P(x,y)B(x,y),\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=Q(x,y)B(x,y),\end{cases} \qquad ①$$

由例 9 结论，因为$\frac{\partial(PB)}{\partial x}+\frac{\partial(QB)}{\partial y}$在$G$ 上保持常号，满足命题的要求，故系统①在G 上不存在闭轨.

因为系统①与原系统可化为相同的方程式，所以，原系统在G 上也不存在闭轨.

例 12 系统

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y,\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-x-ay-\mu x^2-y^2,\end{cases}\qquad a>0,\mu>0$$

在 xOy 平面上是否存在闭轨？

解 $P(x,y)=y$，$Q(x,y)=-x-ay-\mu x^2-y^2$. 可以找到$B(x,y)=a\mathrm{e}^{2x}$，使得

$$\frac{\partial(PB)}{\partial x}+\frac{\partial(QB)}{\partial y}=-a^2\mathrm{e}^{2x}<0$$

满足丢拉克定理要求，故在 xOy 平面上不存在闭轨.

例 13 证明方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}+ax+b\frac{dx}{dt}-\alpha x^2-\beta\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=0 \qquad ①$$

不存在极限环. 其中 a,b,α,β 为常数,且 $b\neq 0,\beta\neq 0$.

证 将式①化为

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y,\\ \dfrac{dy}{dt}=-ax-by+\alpha x^2+\beta y^2,\end{cases} \qquad ②$$

可解得奇点为 $(0,0)$ 和 $(a/\alpha,0)$,若 $a=0$,则奇点仅为 $(0,0)$.

由本迪克森定理(例 9)知,由于

$$\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial(-ax-by+\alpha x^2+\beta y^2)}{\partial y}=-b+2\beta y,$$

所以在半平面 $y>\dfrac{b}{2\beta}$ 与 $y<\dfrac{b}{2\beta}$ 中都不存在闭轨线,故不存在极限环. 但要考虑是否存在与 $y=\dfrac{b}{2\beta}$ 相交的闭轨线.

取 $B(x,y)=e^{mx+ny}$,则

$$\frac{\partial(PB)}{\partial x}+\frac{\partial(QB)}{\partial y}$$
$$=e^{mx+ny}[-b-anx-(bn-m-2\beta)y+\alpha nx^2+\beta ny^2],$$

其中 m,n 为待定常数. 若取 $n=0,m=-2\beta$,则 $B(x,y)=e^{-2\beta x}$,且

$$\frac{\partial(PB)}{\partial x}+\frac{\partial(QB)}{\partial y}=-be^{-2\beta x}\neq 0,$$

故依丢拉克定理(例11),方程在全平面不存在闭轨线,从而在全平面不存在极限环.

例14 设函数 $P(x,y),Q(x,y),B(x,y)$ 在环形区域 G 内有一阶连续偏导数,且 $\dfrac{\partial(PB)}{\partial x}+\dfrac{\partial(QB)}{\partial y}\neq 0$. 证明方程组

$$\frac{dx}{dt}=P(x,y),\quad \frac{dy}{dt}=Q(x,y)$$

在区域 G 内最多有一条闭轨线.

证 用反证法. 设方程组在G内有两条闭轨线C_1和C_2,将C_1和C_2所围区域记为D,则依据格林公式,有

$$\oint_{C_1+C_2} BP\mathrm{d}y-BQ\mathrm{d}x=\iint_D\left(\frac{\partial(BP)}{\partial x}+\frac{\partial(QB)}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

由题设$\frac{\partial(BP)}{\partial x}+\frac{\partial(QB)}{\partial y}\neq 0$,故可设$\frac{\partial(BP)}{\partial x}+\frac{\partial(QB)}{\partial y}>0$(小于0同样可证),则上式右端大于零,而上式左端

$$\begin{aligned}&\oint_{C_1+C_2} BP\mathrm{d}y-BQ\mathrm{d}x\\&=\oint_{C_1}(BPQ-BQP)\mathrm{d}t+\oint_{C_2}(BPQ-BQP)\mathrm{d}t=0,\end{aligned}$$

从而推出矛盾,故在区域G内至多有一条闭轨线.

第三节 稳定性概念

主要内容

1. 考虑二阶系统

$$\begin{cases}\dot{x}_1=f_1(t,x_1,x_2),\\ \dot{x}_2=f_2(t,x_1,x_2)\end{cases} \tag{①}$$

的解$x_1=\bar{x}_1(t)$,$x_2=\bar{x}_2(t)$在$[t_0,+\infty)$上存在,$\bar{x}_1(t_0)=\bar{x}_{10}$,$\bar{x}_2(t_0)=\bar{x}_{20}$.

定义5.3 如果对于任意给定的$\varepsilon>0$,存在正数$\delta=\delta(\varepsilon,t_0)$,使得对于满足

$$|\tilde{x}_{10}-\bar{x}_{10}|\leqslant\delta,\quad |\tilde{x}_{20}-\bar{x}_{20}|\leqslant\delta$$

的所有$\tilde{x}_{10}$,$\tilde{x}_{20}$以及$t\geqslant t_0$,均有

$$|\bar{x}_1(t)-\tilde{x}_1(t)|<\varepsilon,\quad |\bar{x}_2(t)-\tilde{x}_2(t)|<\varepsilon,$$

其中$\tilde{x}_1(t)$,$\tilde{x}_2(t)$为系统①的满足$\tilde{x}_1(t_0)=\tilde{x}_{10}$,$\tilde{x}_2(t_0)=\tilde{x}_{20}$的解,则称解$x_1=\bar{x}_1(t)$,$x_2=\bar{x}_2(t)$是**稳定的**.

如果 $x_1=\overline{x}_1(t)$，$x_2=\overline{x}_2(t)$不是稳定的，则称它是**不稳定的**.

定义 5.4 如果 $x_1=\overline{x}_1(t)$，$x_2=\overline{x}_2(t)$为稳定的，且存在 $\delta_0(t_0)>0$，使得对于任意满足

$$|\widetilde{x}_{10}-\overline{x}_{10}|\leqslant\delta_0,\quad |\widetilde{x}_{20}-\overline{x}_{20}|\leqslant\delta_0$$

的 $\widetilde{x}_{10}$，$\widetilde{x}_{20}$，均有

$$\lim_{t\to+\infty}[\overline{x}_1(t)-\widetilde{x}_1(t)]=0,\quad \lim_{t\to+\infty}[\overline{x}_2(t)-\widetilde{x}_2(t)]=0,$$

其中 $\widetilde{x}_1(t)$，$\widetilde{x}_2(t)$为系统①的满足 $\widetilde{x}_1(t_0)=\widetilde{x}_{10}$，$\widetilde{x}_2(t_0)=\widetilde{x}_{20}$的解，则称解 $x_1=\overline{x}_1(t)$，$x_2=\overline{x}_2(t)$是**渐近稳定的**.

2. 考虑区域 D_1：$|x_1|\leqslant h$，$|x_2|\leqslant h$.

定义 5.5 如果函数 $V(x_1,x_2)$在 D_1 上连续可微，并且满足 $V(0,0)=0$，$V(x_1,x_2)>0(<0)$，$(x_1^2+x_2^2\neq0)$，则称 $V(x_1,x_2)$为 D 上的**正(负)定函数**.

定义 5.6 如果函数 $V(x_1,x_2)$在 D_1 上连续可微，并且满足 $V(0,0)=0$，$V(x_1,x_2)\geqslant0(\leqslant0)$，则称 $V(x_1,x_2)$为 D 上的**常正(负)函数**.

定义 5.7 如果函数 $V(x_1,x_2)$在 D_1 上连续可微，且在(0,0)的无论多么小的邻域中，$V(x_1,x_2)$既可取到正值，又可取到负值，则称 $V(x_1,x_2)$为**变号函数**.

定义 5.8 假设函数 $V(x_1,x_2)$在(0,0)的邻域中连续可微，则将函数

$$\frac{\partial V(x_1,x_2)}{\partial x_1}f_1(x_1,x_2)+\frac{\partial V(x_1,x_2)}{\partial x_2}f_2(x_1,x_2)$$

称为 $V(x_1,x_2)$关于系统 $\dot{x}_1=f_1(x_1,x_2)$，$\dot{x}_2=f_2(x_1,x_2)$的**全导数**，并记为 $\dot{V}(x_1,x_2)$.

3. 三个基本定理

只考虑自治系统

$$\dot{x}_1=f_1(x_1,x_2),\quad \dot{x}_2=f_2(x_1,x_2). \qquad ②$$

定理 5.2(稳定性定理) 如果在某个 D_1 上存在正(负)定函数

$V(x_1,x_2)$，且它关于系统 $\dot{x}_1=f_1(x_1,x_2)$，$\dot{x}_2=f_2(x_1,x_2)$的对 t 的全导数 $\dot{V}$ 在 D_1 上为常负（正）函数，则系统 $\dot{x}_1=f_1(x_1,x_2)$，$\dot{x}_2=f_2(x_1,x_2)$的零解 $x_1=x_2=0$ 是**稳定的**.

定理 5.3（渐近稳定性定理） 如果在原点(0,0)的某个邻域 D_1 上存在正（负）定函数 $V(x_1,x_2)$，它关于系统 $\dot{x}_1=f_1(x_1,x_2)$，$\dot{x}_2=f_2(x_1,x_2)$的对 t 的全导数 $\dot{V}(x_1,x_2)$在 D_1 上为负（正）定的函数，则系统 $\dot{x}=f_1(x_1,x_2)$，$\dot{x}_2=f_2(x_1,x_2)$的零解 $x_1=x_2=0$ 是**渐近稳定的**.

定理5.4（不稳定性定理） 如果存在函数 $V(x_1,x_2)$，它关于系统 $\dot{x}_1=f_1(x_1,x_2)$，$\dot{x}_2=f_2(x_1,x_2)$在区域 D_1 上是正（负）定的，但 $V(x_1,x_2)$本身却不是常负（正）的，则系统 $\dot{x}_1=f_1(x_1,x_2)$，$\dot{x}_2=f_2(x_1,x_2)$的零解 $x_1=x_2=0$ 是**不稳定的**.

用来判别稳定性的函数 $V(x_1,x_2)$，称为李雅普诺夫(Ляпунов)函数.

4. 二阶线性系统

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=a_{11}x+a_{12}y,\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=a_{21}x+a_{22}y,\end{cases}\qquad \begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}=\boldsymbol{A} \tag{③}$$

的奇点的分类可利用稳定性理论确定.

(1) 设 $\boldsymbol{A}$ 有相异实根 λ,μ.

(i) λ,μ 同号. 若 λ,μ 同正，$O(0,0)$为不稳定的结点；若 λ,μ 同负，$O(0,0)$为稳定的结点.

(ii) λ,μ 异号. $O(0,0)$为不稳定的鞍点.

(2) 设 $\boldsymbol{A}$ 有二重特征根.

(i) 若 $\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}$，则 $\lambda<0$ 时，$O(0,0)$为渐近稳定的临界结点；$\lambda>0$ 时，$O(0,0)$为不稳定的临界结点.

(ii) 若 $\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 1 & \lambda\end{bmatrix}$，则 $\lambda<0$ 时，$O(0,0)$ 为渐近稳定的退化结点；$\lambda>0$ 时，$O(0,0)$ 为不稳定的退化结点.

(3) 设 $\boldsymbol{A}$ 有共轭复根 $\alpha\pm\beta\mathrm{i}$.

若 $\alpha=0$，中心 $O(0,0)$ 是稳定的；若 $\alpha<0$，$O(0,0)$ 是稳定的焦点；若 $\alpha>0$，$O(0,0)$ 是不稳定的焦点.

疑难解析

1. 为什么要研究自治系统零解的稳定性？

答 因为，对自治系统任一常数解的研究，都可以化为对相应自治系统零解的研究.

设 $X=X_0$ 是自治系统 $\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}=f(X)$ 的任一常数解，作变换 $Y=X-X_0$，则系统变为

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t}=f(Y+X_0)\overset{\text{def}}{=\!=\!=}F(Y).$$

而系统 $\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}=f(X)$ 的解 $X=X_0$ 就对应于系统 $\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t}=f(Y+X_0)$ 的解 $Y=0$（零解）.

2. 怎样理解判定稳定性的三个基本定理？它们是否可以改进？

答 可以由定号函数的几何意义来理解三个基本定理的正确性. 如对定理5.2，由于 $V(x_1,x_2)$ 定正，而 $\dot{V}(x_1,x_2)$ 常负，则沿自治系统 $\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}=f_1(x_1,x_2)$，$\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}=f_2(x_1,x_2)$ 的轨线，当 t 增大时不会使 $V(x_1,x_2)$ 增大. 所以，从任一闭合超曲面 $V(x_1,x_2)=\varepsilon$ 内部出发的轨线，当 t 增大时不会越出 $V(x_1,x_2)=\varepsilon$，从而知零解 $x_1=0,x_2=0$ 是稳定的.

定理5.3和定理5.4的条件都可以减弱.

（1）若$V(x_1,x_2)$定正（负），$\dot{V}(x_1,x_2)$常负（正），但集合$\Omega=\{(x_1,x_2)|\dot{V}(x_1,x_2)=0\}$内除$(x_1,x_2)=0$（零解）外不含有系统的整条轨线，则$(x_1,x_2)=0$是渐近稳定的.

因为$\dot{V}(x_1,x_2)$常负，且集合Ω内不含除$x_1=x_2=0$外的整条轨线，因而沿轨线t增大时，$\dot{V}(x_1,x_2)$不可能永远为零. 即，$V(x_1,x_2)$总要减小，势必迫使轨线最终趋向平衡位置O.

（2）若$V(x_1,x_2)$在$x_1=x_2=0$的邻域内是变号函数，而$\dot{V}(x_1,x_2)$定号，则$x_1=x_2=0$是不稳定的.

因为，若设$\dot{V}(x_1,x_2)$定正，V的变号保证了在点O的任意邻近均有(x_{10},x_{20})使$V(x_{10},x_{20})>0$，则当t增大时，从(x_{10},x_{20})出发的轨线，始终使$V(x_1,x_2)$增大，所以轨线随t的增大会远离$x_1=x_2=0$.

3. 怎样寻找李雅普诺夫函数$V(x_1,x_2)$？

答 寻求适当的李雅普诺夫函数是十分困难的，对于某些简单的情况，通常有两种思路：一种是从原方程组中舍掉某些项，利用简化后所得方程组的首次积分来作为原方程组的$V(x_1,x_2)$，再进行必要的系数调整；另一种是选用由多项式所构成的定正函数来进行试探和调整.

例如：

（1）讨论系统

$$\frac{dx_1}{dt}=x_2,\quad \frac{dx_2}{dt}=-x_1-ax_2(1+x_2)^2,\quad a\geqslant 0$$

的零解$x_1=x_2=0$的稳定性.

舍去$\frac{dx_2}{dt}=-x_1-ax_2(1+x_2)^2$右端的第二项，得简化的系统$\frac{dx_1}{dt}=x_2,\frac{dx_2}{dt}=-x_1$，易于求得首次积分为$x_1^2+x_2^2=C$. 故可取$V(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2$. 可以看到，原系统是在简化系统第二个方程右

端添加一项得到的，因此在沿原系统的轨线计算$\dot{V}(x_1,x_2)$时，由于前两项将被消去，使所得结果比较简单，从而便于讨论$\dot{V}(x_1,x_2)$的性态．这就是为什么这样选取$V(x_1,x_2)$的原因与思路．具体讨论如下：

当$a=0$时，$\dot{V}(x_1,x_2)\equiv 0$，由定理5.2知零解稳定，但此时$x_1^2+x_2^2=C$是原系统的轨线族，故零解不渐近稳定；当$a>0$时，$\dot{V}(x_1,x_2)\leqslant 0$（常负），且$\dot{V}(x_1,x_2)=0$，当且仅当$x_2=0$或$x_2=-1$，而$x_2=0$与$x_2=-1$显然不是原系统的轨线，故由疑难解析2(1)知，此时零解渐近稳定．

(2) 讨论系统$\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}=-x_1^5-x_2^3,\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}=-3x_1^3+x_2^3$的零解的稳定性．

由于三个定理条件中都要求$\dot{V}(x_1,x_2)$定号或常号，所以选取$\dot{V}(x_1,x_2)$时要考虑这一点．可设$V(x_1,x_2)=Ax_1^{\alpha}+Bx_2^{\beta}$，其中$A,B,\alpha,\beta$为待定常数．计算$\dot{V}(x_1,x_2)$，根据化简的原则取定$\alpha,\beta,A,B$．如本例最终取$V(x_1,x_2)=3x_1^4-x_2^4$，则$\dot{V}(x_1,x_2)=-4(3x_1^8+x_2^6)$定负，而$V(x_1,x_2)$在$\mathring{U}(0,0)$是变号函数，所以，由疑难解析2中的(1)知，零解不稳定．

方法、技巧与典型例题分析

本节要求熟悉解的稳定性的概念，对稳定、渐近稳定、不稳定有明确的理解；要求能够运用三个基本定理和系数矩阵的特征值来讨论和确定解的稳定性．

例1 在二维空间里讨论下列函数的符号性质：

(1) $V(x_1,x_2)=-x_2^2$；

(2) $V(x_1,x_2)=x_2^2-2x_1x_2^2$；

(3) $V(x_1,x_2)=x_1^2-2x_1x_2^2+x_2^4+x_1^4$;

(4) $V(x_1,x_2)=x_1^2+2x_1x_2+x_2^2+x_1^2x_2^4$;

(5) $V(x_1,x_2)=x_1\cos x_1+x_2\sin x_2$;

(6) $V(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+x_3^2-x_3^3$.

解 (1) $V(x_1,x_2)$是常号函数，且是常负的.

(2) $V(x_1,x_2)=x_2^2(1-2x_1)$，因而存在充分小的正数$h>0$，当$|x_1|\leqslant h$，$|x_2|\leqslant h$时，$V(x_1,x_2)\geqslant 0$，且在$O(0,0)$的邻域上，当$x_1\neq 0$时，$V(x_1,x_2)$也可能为零. 所以$V(x_1,x_2)$是常号函数，且是常正的.

(3) $V(x_1,x_2)=(x_1-x_2^2)^2+x_1^4$，仅当$x_1=x_2=0$时，$V(x_1,x_2)=0$，其他$V(x_1,x_2)>0$. 所以，$V(x_1,x_2)$是常号函数，且是正定的.

(4) $V(x_1,x_2)=(x_1+x_2)^2+x_1^2x_2^4$，所以是常号函数，且是正定的.

(5) $V(x_1,x_2)=x_1\cos x_1+x_2\sin x_2$，因为在任何$|x_1|<h$，$|x_2|<h$内，$\sin x_2$的正负与$x_1$的正负都是改变的，所以，$V(x_1,x_2)$是变号函数.

(6) 若$x_3\neq 0$，取$h=1-\varepsilon(0<\varepsilon<1)$，当$\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}<h$时，$x_3^2-x_3^3>0$，所以，$V(x_1,x_2,x_3)$是常正的.

例2 若自治系统$\frac{dx_1}{dt}=f_1(x_1,x_2)$，$\frac{dx_2}{dt}=f_2(x_1,x_2)$的一切解均满足$\lim\limits_{t\to+\infty}x_1=0$，$\lim\limits_{t\to+\infty}x_2=0$，那么，$x_1=x_2=0$是否渐近稳定的？为什么？

解 不是渐近稳定的. 因为不能保证从点(0,0)足够小邻域出发的轨线，始终保持在点(0,0)的充分小邻域内.

例3 对于方程组

$$\begin{cases}\dot{x}_1=-x_1x_2^4,\\ \dot{x}_2=x_2x_1^4,\end{cases}$$

试说明$V(x_1,x_2)=x_1^4+x_2^4$是正定的，而$\frac{dV}{dt}$是常负的.

解　因为$V(x_1,x_2)=x_1^4+x_2^4$，$V(0,0)=0$，当$x_1^2+x_2^2\neq 0$时，$V(x_1,x_2)>0$，所以$V(x_1,x_2)=x_1^4+x_2^4$是正定的.

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial V}{\partial x_1}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial V}{\partial x_2}\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}=4x_1^3(-x_1x_2^4)+4x_2^3(x_2x_1^4)=0,$$

因而$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$是常负的.

例 4　讨论系统$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+x=0$的零解的稳定性.

解　令$x_2=\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}$，则系统化为方程组

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}=x_2,\\ \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}=-x_1-x_2.\end{cases}\qquad ①$$

令$V(x_1,x_2)=3x_1^2+2x_1x_2+2x_2^2$，则$V(x_1,x_2)=(x_1+x_2)^2+2x_1^2+x_2^2$，显然是正定函数. 可求得$V(x_1,x_2)$沿方程组①轨线的全导数$\dot{V}(x_1,x_2)=-2(x_1^2+x_2^2)$，它是负定的，所以，该系统的零解是渐近稳定的.

例 5　考察下列系统零解的稳定性：

(1) $\begin{cases}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}=-x_1+x_1x_2^2,\\ \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}=-2x_1^2x_2;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}=-x_2-x_1^3,\\ \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}=x_1-x_2^3.\end{cases}$

解　(1) 取$V(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2$，知$V(x_1,x_2)$是正定的. 又

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=2x_1\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}+2x_2\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}=-2x_1^2-2x_1^2x_2^2=-2x_1^2(1+x_2^2),$$

所以$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$是常负的，从而系统的零解是稳定的.

(2) 取$V(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2$知，$V(x_1,x_2)$是正定的. 又

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}&=2x_1\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}+2x_2\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}=2x_1(-x_2-x_1^3)+2x_2(x_1-x_2^3)\\&=-2(x_1^4+x_2^4),\end{aligned}$$

所以$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$是负定的，从而系统的零解是渐近稳定的.

例6 考察阻尼振动系统 $\ddot{x}+k\dot{x}+nx=0(k>0,n>0)$平衡点的稳定性.

解 令$x_2=\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}$，则系统化为方程组

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}=x_2,\\ \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}=-kx_2-nx_1.\end{cases}$$

取$V(x_1,x_2)=\frac{1}{2}x_2^2+nx_1^2+\frac{1}{2}(x_2+kx_1)^2$，则$V(x_1,x_2)$是正定的. 又

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=x_2\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}+2nx_1\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}+(x_2+kx_1)\left(\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}+k\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}\right)=-kx_2^2-nkx_1^2,$$

所以$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$是负定的，因而系统的零解是渐近稳定的.

例7 考察线性系统

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}=ax_1+bx_2,\\ \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}=cx_1+dx_2,\end{cases}\quad \begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}>0$$

零解的稳定性.

解 取$V(x_1,x_2)=(ad-bc)(x_1^2+x_2^2)+(cx_1-ax_2)^2+(dx_1-bx_2)^2$，则$V(x_1,x_2)$是正定的. 又

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}&=2(ad-bc)\left(x_1\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}+x_2\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}\right)+2(cx_1-ax_2)\left(c\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}-a\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}\right)\\&\quad+2(dx_1-bx_2)\left(d\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}-b\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}\right)\\&=2(a+d)(ad-bc)(x_1^2+x_2^2).\end{aligned}$$

(1) $a+d<0$，此时$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$是负定的. 系统的零解是渐近稳定的. 因为$\Delta=ad-bc>0,\sigma=a+d<0$. 由第一节知，系统的奇点为

稳定的结点($\sigma^2-4\Delta\geqslant 0$)或稳定的焦点($\sigma^2-4\Delta<0$),所以,系统的奇点为稳定的结点与焦点时,系统的零解是渐近稳定的.

(2) $a+d=0$,此时$\frac{dV}{dt}$是常负的,于是系统的零解是稳定的.

因为$\Delta>0,\sigma=0$,所以奇点$O(0,0)$为中心,即奇点$O(0,0)$为中心时,系统的零解是稳定的.

(3) $a+d>0$,此时$\frac{dV}{dt}$是正定的,系统的奇点是不稳定结点($\sigma^2-4\Delta\geqslant 0$)或不稳定焦点($\sigma^2-4\Delta<0$),系统的零解是(负向)渐近稳定的.

作时间代换$t=-\tau$. 则原系统化为

$$\frac{dx_1}{d\tau}=-ax_1-bx_2,\quad \frac{dx_2}{d\tau}=-cx_1-dx_2.$$

取$V(x_1,x_2)=(ad-bc)(x_1^2+x_2)^2+(cx_1+dx_2)^2+(dx_1-bx_2)^2$,

则
$$\frac{dV}{dt}=-(a+d)(ad-bc)(x_1^2+x_2^2).$$

从而知,$V(x_1,x_2)$是正定的,$\frac{dV}{dt}$是负定的. 故$a+d>0$时,系统$\frac{dx_1}{d\tau}=-ax_1-bx_2,\frac{dx_2}{d\tau}=-cx_1-dx_2$的零解是渐近稳定的,而称原系统的零解是(负向)渐近的. 因此,当原系统的奇点$O(0,0)$是不稳定结点与焦点时,系统的零解是(负向)渐近稳定的.

例8 考察系统$\frac{dx_1}{dt}=x_2^3+x_1^5,\frac{dx_2}{dt}=x_1^3+x_2^5$零解的稳定性.

解 取$V(x_1,x_2)=x_1^4-x_2^4$,$|x_1|>|x_2|$的区域为$V(x_1,x_2)>0$的区域,称为正号区. 因为

$$\frac{dV}{dt}=4x_1^3\frac{dx_1}{dt}-4x_2^3\frac{dx_2}{dt}=4(x_1^8-x_2^8),$$

所以,在$V(x_1,x_2)$的正号区$|x_1|>|x_2|$上,$\frac{dV}{dt}>0$,且

$$\frac{dV}{dt}=4(x_1^8-x_2^8)=4(x_1^4+x_2^4)(x_1^4-x_2^4),$$

故当$V(x_1,x_2)=x_1^4-x_2^4\geqslant\delta$时，$x_1^4+x_2^4\geqslant x_1^4-x_2^4$，有$\dfrac{dV}{dt}\geqslant 4\delta^2>0$，故系统的零解是不稳定的.

例 9 讨论下列系统零解的稳定性：

(1) $\begin{cases}\dot{x}=-y-x^2y,\\ \dot{y}=x-x^4y;\end{cases}$ (2) $\begin{cases}\dot{x}=-y+x(x^2+y^2),\\ \dot{y}=x+y(x^2+y^2);\end{cases}$

(3) $\begin{cases}\dot{x}=y,\\ \dot{y}=-a^2\sin x;\end{cases}$ (4) $\begin{cases}\dot{x}=y+ax^3,\\ \dot{y}=-x+ay^3;\end{cases}$

(5) $\begin{cases}\dot{x}=y,\\ \dot{y}=-x-3(1+y^2)y.\end{cases}$

解 本例用首次积分与$V(x,y)$讨论.

(1) 因为$\begin{cases}\dot{x}=-y,\\ \dot{y}=x\end{cases}$的首次积分为$x^2+y^2\equiv C$，故令$V(x,y)=x^2+y^2$，从而$V(x,y)$为正定的. 又

$$\frac{dV}{dt}=\frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial V}{\partial y}\frac{dy}{dt}=-2xy-2x^2y^2+2xy-2x^4y^2\leqslant 0,$$

所以，零解是稳定的.

(2) 因为$\begin{cases}\dot{x}=-y,\\ \dot{y}=x\end{cases}$的首次积分为$x^2+y^2\equiv C$，故令$V(x,y)=x^2+y^2$，从而$V(x,y)$为正定的. 又

$$\frac{dV}{dt}=\frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial V}{\partial y}\frac{dy}{dt}=2x[x(x^2+y^2)-y]+2y[x+y(x^2+y^2)]$$
$$=2(x^2+y^2)^2>0,$$

所以，$x=0,y=0$是不稳定的.

(3) 因为$\begin{cases}\dot{x}=y,\\ \dot{y}=-a^2\sin x\end{cases}$的首次积分为$y^2-2a^2\cos x\equiv C$，令$V(x,y)=y^2-2a^2\cos x\equiv C$，则$V(x,y)$是正定的或负定的. 又

$$\frac{dV}{dt}=2y(-a^2\sin x)+2a^2\sin x\cdot y=0,$$

所以，零解 $x=y=0$ 是稳定的.

(4) 因为 $\begin{cases}\dot{x}=y,\\ \dot{y}=-x\end{cases}$ 的首次积分为 $x^2+y^2\equiv C$，令 $V(x,y)=x^2+y^2$，则 $V(x,y)$ 是正定的. 又

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial V}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=2x(y+ax^3)+2y(ay^3-x)=2a(x^2+y^2),$$

所以，当 $a<0$ 时，$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}<0$，零解是渐近稳定的；当 $a>0$ 时，$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}>0$，零解是不稳定的；当 $a=0$ 时，$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=0$，零解是稳定的.

(5) 因为 $\begin{cases}\dot{x}=y,\\ \dot{y}=-x\end{cases}$ 的首次积分为 $x^2+y^2\equiv C$，令 $V(x,y)=x^2+y^2$，则 $V(x,y)$ 是正定的. 又

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}&=\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial V}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=2xy+2y[-x-3(1+y^2)y]\\&=-6(1+y^2)y^2\leqslant 0,\end{aligned}$$

当 $y=0$ 或 -1 时，$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=0$. 但 $y=0$ 或 $y=-1$ 不是轨线，所以，零解是渐近稳定的.

例 10 讨论下列系统零解的稳定性：

(1) $\begin{cases}\dot{x}=-x-y+2z,\\ \dot{y}=x+y,\\ \dot{z}=x+y;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}\dot{x}=2x+8\sin y,\\ \dot{y}=2-\mathrm{e}^x-3y-\cos y.\end{cases}$

解 (1) 系统的系数矩阵的特征方程为

$$\begin{vmatrix}-1-\lambda & -1 & 2\\ 1 & 1-\lambda & 0\\ 1 & 1 & -\lambda\end{vmatrix}=\lambda(\lambda^2-2)=0,$$

解得 $\lambda_1=0,\lambda_2=\sqrt{2},\lambda_3=-\sqrt{2}$，所以系统的零解是不稳定的.

(2) 将 $\sin y,\cos y,\mathrm{e}^y$ 用泰勒公式展开，可得原系统的线性近似系统

$$\begin{cases}\dot{x}=2x+8y,\\ \dot{y}=-x-3y,\end{cases}$$

其系数矩阵的特征方程为

$$\begin{vmatrix}2-\lambda & 8\\ -1 & -3-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+\lambda+2=0,$$

解得特征值 $\lambda_{1,2}=\frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{7}\mathrm{i})$，可见特征值有负实部，零解是渐近稳定的.

对于 n 阶常系数线性微分方程组 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，其中

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$$

的解有如下两个定理.

定理 1 若系统 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征根为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r$，则有下面三个结论.

(1) 若 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r$ 均有负实部，则系统 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的零解是渐近稳定的；

(2) 若 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r$ 中至少有一个具有正实部，则系统 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的零解是不稳定的；

(3) 若 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r$ 中没有正实部的根，但是有零根或零实部的纯虚根，则当零根或零实部根的初等因子都是一次时，系统 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的零解是稳定的. 当零根或零实部的根中至少有一个的初等因子的次数大于 1 时，系统 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的零解是不稳定的.

一般情况下，系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程是一个一元 n 次代数方

程，其根不易求得．此时，可由代数学中著名的儒歇-胡尔威茨(Rouche-Hurwitz)判据来判定．

定理2 有一元n次常系数代数方程

$$a_0\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n=0, \quad ①$$

其$a_0>0$，作行列式

$$\Delta_n=\begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & a_{2n-3} & a_{2n-4} & \cdots & a_n \end{vmatrix},$$

式中，当$i>n$时$a_i=0$，则式①的所有根均有负实部的充要条件是：Δ_n的一切主子式都大于零，即

$$\Delta_1=a_1>0, \quad \Delta_2=\begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}>0,$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}>0, \quad \cdots, \quad \Delta_n=a_n\Delta_{n-1}>0.$$

例11 讨论方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-x-4y+2z, \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=3x-y-2z, \\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=-2x+y-z \end{cases}$$

零解的稳定性．

解 系数矩阵$\boldsymbol{A}$的特征方程为

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & -4 & 2 \\ 3 & -1-\lambda & -2 \\ 2 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix}=-(\lambda^3+3\lambda^2+21\lambda+29)=0,$$

其特征根不易求得．则由定理2，得

$$\Delta_1=a_1=3>0,\quad \Delta_2=\begin{vmatrix}3 & 1\\ 29 & 21\end{vmatrix}=34>0,$$

$$\Delta_3=a_3\Delta_2=29\times 34=986>0.$$

知特征方程的根均有负实部，因而方程组的零解是渐近稳定的.

对 n 阶非线性微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{F}(x),\qquad ①$$

若
$$\boldsymbol{F}(x)=\begin{pmatrix}f_2(x_1,x_2,\cdots,x_n)\\ \vdots\\ f_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)\end{pmatrix},\quad F(0)=0,$$

$$\lim_{\|x\|\to 0}\frac{\|\boldsymbol{F}(x)\|}{\|x\|}=0,$$

则系统①称为几乎线性系统，$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$（零向量）是其零解. 此时，其零解的稳定性有如下定理.

定理3 若系数矩阵$\boldsymbol{A}$ 的所有特征根具有负实根，则系统①的零解是渐近稳定的；若A 的特征根中至少有一个具有正实部，则系统①的零解是不稳定的.

例12 讨论非线性方程组零解的稳定性：

(1) $$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-x-3y+x^2z^2,\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-x+y+y^2+x^2,\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=x-3z+z^2+y^2;\end{cases}$$

(2) $$\begin{cases}\dot{x}=y-z-2\sin x,\\ \dot{y}=x-2y+(\sin y+z^2)\mathrm{e}^z,\\ \dot{z}=x+y+\dfrac{z}{1-z}.\end{cases}$$

解 利用定理3讨论.

① 系数矩阵$\boldsymbol{A}$ 的特征方程为

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & -3 & 0 \\ -1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -3-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+3)(\lambda+2)(\lambda-2)=0,$$

解得特征根为$\lambda_1=-3,\lambda_2=-2,\lambda_3=2$. 其中有一个正实根,所以系统的零解是不稳定的.

② 系数矩阵$\boldsymbol{A}$的特征方程为

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & -1 \\ 1 & -2-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda^3-2\lambda^2-3)$$

$$= -(\lambda-1)(\lambda^2+3\lambda+3)=0,$$

解得特征根为$\lambda_1=1,\lambda_{2,3}=\dfrac{1}{2}(-3\pm 2\mathrm{i})$. 其中有一个正实根,所以系统的零解是不稳定的.

按前面的解法,要将$\sin x,\sin y,\mathrm{e}^z,\dfrac{z}{1-z}$用泰勒公式展开,求出相应的一次项,得相应的线性近似系统

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y-z-2x, \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=x-y, \\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=x+y-z, \end{cases}$$

其系数矩阵的特征方程为$\lambda^3+2\lambda^2-\lambda+1=0$,可求得

$$\Delta_1=a_1=2>0,\quad \Delta_2=\begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-3<0,$$

所以,系统的零解是不稳定的.

显然,用定理3求解要简单得多.

例13 已知系统

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y-F(x), \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-g(x), \end{cases}$$

其中$F(x),g(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续,且当$x\neq 0$时,$xg(x)>0$,

$xF(x)>0$. 证明系统存在零解，且零解是稳定的.

证 由题设条件可知，当$x>0$时，$g(x)>0, F(x)>0$；当$x<0$时，$g(x)<0, F(x)<0$. 而$F(x), g(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续，所以$F(0)=0, g(0)=0$. 从而知$x=0, y=0$是系统的解，即系统存在零解.

取李雅普诺夫函数$V(x,y)=\frac{1}{2}y^2+\int_0^x g(x)\mathrm{d}x$，则不论$x>0$还是$x<0$，由$g(x)$的性质可知，$V(x,y)$是正定的，而$V(x,y)$在$(-\infty,+\infty)$上的全导数

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}&=\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial V}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=y(-g(x)+g(x)(y-F(x))\\&=-F(x)g(x).\end{aligned}$$

因为$F(x)$与$g(x)$同号，所以$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$是常负的.

依据定理5.2，系统的零解是稳定的.

例14 已知系统

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y-xf(x,y),\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-x-yf(x,y),\end{cases}$$

其中$f(x,y)$有连续的一阶偏导数，证明：

(1) 如果在原点的邻域内$f(x,y)>0$，则系统的零解是渐近稳定的；

(2) 如果在原点的邻域内$f(x,y)<0$，则系统的零解是不稳定的.

证 由所给系统知，零解是确实存在的.

取李雅普诺夫函数$V(x,y)=x^2+y^2$，显然$V(x,y)$是正定的，而$V(x,y)$的全导数

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}&=\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial V}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=2x(y-xf(x,y))+2y(-x-yf(x,y))\\&=-2f(x,y)(x^2+y^2).\end{aligned}$$

(1) 若在原点的邻域内 $f(x,y)>0$，则$\frac{dV}{dt}$是负定的，于是，依据定理5.3，系统的零解是渐近稳定的.

(2) 若在原点的邻域内 $f(x,y)<0$，则$\frac{dV}{dt}$是正定的，于是，依据定理5.4，系统的零解是不稳定的.

例15 设有常系数齐次线性方程组 $\dot{x}=\boldsymbol{A}x, x\in R^2$，$\boldsymbol{A}$ 为二阶常数矩阵，记 $p=-\mathrm{tr}\boldsymbol{A}, q=\det\boldsymbol{A}$，设 $p^2+q^2\neq 0$，证明：

(1) 当 $p>0, q>0$ 时，系统的零解是渐近稳定的；

(2) 当 $p>0, q=0$ 或 $p=0, q>0$ 时，系统的零解是稳定的；

(3) 其他情形下，系统的零解是不稳定的.

解 因为系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程为 $\lambda^2+p\lambda+q=0$，所以

(1) 当 $p>0, q>0$ 时，特征值 $\lambda_{1,2}=\frac{1}{2}(-p\pm\sqrt{p^2-4q})$. 特征值均有负实部，所以，系统的零解是渐近稳定的.

(2) 当 $p=0, q>0$ 或 $p>0, q=0$ 时，由特征值无法判定稳定性. 取李雅普诺夫函数 $V(x,y)=x^2+y^2$，知 $V(x,y)$ 是正定的，而$\frac{dV}{dt}$是常号的，所以，系统的零解是稳定的.

(3) 其他情形，特征值的实部至少有一个为正，所以，系统的零解是不稳定的.

例16 设有方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y+\sin x,\\ \dfrac{dy}{dt}=ax+by,\end{cases}$$

设 $a\neq b$，且 $(b+1)^2\neq 4(b-a)$，$b\neq -1$.

(1) 判别奇点(0,0)的类型；

(2) 当 a,b 为何值时，零解渐近稳定？并证明：如果零解渐近稳定，则不存在极限环.

证 (1) 将原方程组在点(0,0)处线性化，得

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x+y,\\[2mm]\dfrac{dy}{dt}=ax+by.\end{cases}$$

对应系数矩阵的特征方程为$\lambda^2-(b+1)\lambda+(b-a)=0$解得特征值 $\lambda_{1,2}=\dfrac{1}{2}\left[(b+1)\pm\sqrt{(b+1)^2-4(b-a)}\right]$. 当$(b+1)^2>4(b-a)$时，两个特征值均为实数，下面对$a,b$的取值进行讨论.

(i) 若$b+1<0,b-a>0$,则两个特征值均为负实数，点(0,0)为系统的稳定结点.

(ii) 若$b+1>0,b-a>0$,则两个特征值均为正实数，点(0,0)为系统的不稳定的结点.

(iii) 若$b-a<0$,则两个特征值为异号的实数，点(0,0)为系统的鞍点.

当$(b+1)^2<4(b-a)$时，讨论如下：

(iv) 若$b+1<0$,则特征值为实部小于零的一对共轭复数，点(0,0)为稳定的焦点.

(v) 若$b+1>0$,则特征值为实部大于零的一对共轭复数，点(0,0)为不稳定的焦点.

(vi) 若$b=-1(b-a>0)$,则特征值为一对共轭虚根，需由原方程组讨论点(0,0)的类型. 此时点(0,0)可能是中心，也可能是焦点，要根据具体数值来确定.

(2) 由对点(0,0)类型的分析可知，当$a<b<-1$时，点(0,0)为稳定的结点或焦点，从而可知零解是渐近稳定的.

若零解是渐近稳定的，即当$a<b<-1$时，在相平面上，对任意(x,y)，有

$$\frac{\partial(y+\sin x)}{\partial x}+\frac{\partial(ax+by)}{\partial y}=\cos x+b\neq 0.$$

从而，由本迪克森定理(本章第二节例9)知，不存在任何闭轨线，也就不存在极限环.

例17 设n阶常数方阵A的所有特征值具有负实部，n阶矩阵值函数$B(t)$在$[0,+\infty)$上连续，且$\int_0^{+\infty}\|\boldsymbol{B}(t)-\boldsymbol{A}\|\mathrm{d}t<+\infty$. 证明：方程组

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{x} \quad ①$$

的零解是渐近稳定的.

证 将方程组①改写为$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+[\boldsymbol{B}(t)-\boldsymbol{A}]\boldsymbol{x}$，则可视为线性部分为$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$的非齐次方程组. 于是，满足初值条件$\boldsymbol{x}(t_0)=x_0$的解为

$$\boldsymbol{x}(t)=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}x_0+\int_{t_0}^{t}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-s)}[\boldsymbol{B}(s)-\boldsymbol{A}]\boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}s.$$

因为A的所有特征值的实部小于零，所以存在$a>0$，使得

$$\|\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}\|\leqslant M\mathrm{e}^{-a(t-t_0)}\quad(M>0).$$

考虑$t\geqslant t_0$情形. 由常数变易公式，得

$$\|\boldsymbol{x}(t)\|\leqslant M\mathrm{e}^{-a(t-t_0)}\|x_0\| +\int_{t_0}^{t}M\mathrm{e}^{-a(t-s)}\|\boldsymbol{B}(s)-\boldsymbol{A}\|\ \|\boldsymbol{x}(s)\|\mathrm{d}s,$$

即
$$\mathrm{e}^{a(t-t_0)}\|\boldsymbol{x}(t)\|\leqslant M\|x_0\| +\int_{t_0}^{t}M\mathrm{e}^{a(s-t_0)}\|\boldsymbol{B}(s)-\boldsymbol{A}\|\ \|\boldsymbol{x}(s)\|\mathrm{d}s.$$

若记
$$u(t)=\mathrm{e}^{a(t-t_0)}\|x(t)\|,$$

则得
$$u(t)\leqslant M\|x_0\|+\int_{t_0}^{t}M\|\boldsymbol{B}(s)-\boldsymbol{A}\|u(s)\mathrm{d}s.$$

由格隆威尔(Gronwall)不等式可以得出

$$u(t)\leqslant M\|x_0\|\mathrm{e}^{M\int_{t_0}^{+\infty}\|\boldsymbol{B}(s)-\boldsymbol{A}\|\mathrm{d}s}=M\mathrm{e}^{N}\|x_0\|,$$

其中
$$N=M\int_{t_0}^{+\infty}\|\boldsymbol{B}(s)-\boldsymbol{A}\|\mathrm{d}s,$$

$$\|x(t)\|\leqslant M\mathrm{e}^{-a(t-t_0)}\|x_0\|\mathrm{e}^{M\int_{t_0}^{+\infty}\|\boldsymbol{B}(s)-\boldsymbol{A}\|\mathrm{d}s}=MD\mathrm{e}^{-a(t-t_0)}\|x_0\|,$$

其中$D=\mathrm{e}^{M\int_{t_0}^{+\infty}\|\boldsymbol{B}(s)-\boldsymbol{A}\|\mathrm{d}s}$. 从而由零解渐近稳定的定义知，原方程组

的零解是渐近稳定的.

例 18 讨论方程

$$\ddot{x}+p\dot{x}+q(x-x^3)=0 \quad ①$$

的零解 $x=0,\dot{x}=0$ 的稳定性. 其中 $q>0$, p 为实参数.

解 将方程①化为对应的方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y,\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-qx-py+qx^3.\end{cases} \quad ②$$

再化为对应的线性方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y,\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-qx-py,\end{cases} \quad ③$$

其系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程为 $\lambda^2+p\lambda+q=0$,有特征值 $\lambda_{1,2}=\dfrac{1}{2}(-p\pm\sqrt{p^2-4q})$.

(1) 若 $p^2>4q$,则两个特征值为同号的实数. 若 $p>0$,则两个特征值为负实数,零解 $x=0,\dot{x}=0$ 是渐近稳定的;若 $p<0$,则两个特征值为正实数,零解 $x=0,\dot{x}=0$ 是不稳定的.

(2) 若 $p^2=4q$,则两个特征值是与 p 符号相反的二重实根. 若 $p>0$,则 λ 为负实数,零解 $x=0,\dot{x}=0$ 是渐近稳定的;若 $p<0$,则 λ 为正实数,零解 $x=0,\dot{x}=0$ 是不稳定的.

(3) 若 $p^2<4q$,$p\neq0$,则两个特征值为一对共轭复数,实部为 $-p/2$. 若 $p>0$,则两个特征值均有负实部,所以零解 $x=0,\dot{x}=0$ 是渐近稳定的;若 $p<0$,则两个特征值有正实部,所以零解 $x=0,\dot{x}=0$ 是不稳定的;若 $p=0$,则两个特征值是一对共轭虚数,不能直接判定. 取李雅普诺夫函数 $V(x,y)=\dfrac{q}{2}x^2+\dfrac{1}{2}y^2-\dfrac{q}{4}x^4$(可由对

$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{q(x^2-x)}{y}$的首次积分$\frac{1}{2}y^2=q\left(\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2\right)+C$作出). 因为在点(0,0)附近,$V(x,y)$正定,$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=0$,所以零解$x=0,\dot{x}=0$是稳定的.

综上所述,若$p>0$,零解是渐近稳定的;若$p<0$,零解是不稳定的;若$p=0$,零解是稳定的,但不是渐近稳定的.

例19 设矩阵值函数$\boldsymbol{A}(t)$在$[t_0,+\infty)$上连续($t_0\geqslant 0$),且当t固定时,$\boldsymbol{A}(t)$的所有特征值$\lambda(t)$满足$\mathrm{Re}\lambda(t)<-a(a>0)$. 若对于任何$t_1,t_2\in[t_0,+\infty)$,$\|\boldsymbol{A}(t_1)-\boldsymbol{A}(t_2)\|<K$,且$2MK\leqslant a$成立,其中$M$由不等式$\|\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t_0)t}\|\leqslant M\mathrm{e}^{-at}(t\geqslant t_0)$确定,$K$为正常数. 证明:线性微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}(t)x \qquad ①$$

的零解是渐近稳定的.

解 将方程组①改写为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}(t_0)x+[\boldsymbol{A}(t)-\boldsymbol{A}(t_0)]x.$$

由常数变易公式,方程组①满足$x(t_0)=x_0$的解为

$$x(t)=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t_0)(t_0-t)}x_0+\int_{t_0}^{t}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t_0)(t-s)}[\boldsymbol{A}(s)-\boldsymbol{A}(t_0)]x(s)\mathrm{d}s.$$

所以对$t\geqslant t_0$有估计式

$$\begin{aligned}\|x(t)\|&\leqslant\|\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t_0)(t_0-t)}\|\;\|x_0\|\\&\quad+\int_{t_0}^{t}\|\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t_0)(t-s)}\|\;\|\boldsymbol{A}(s)-\boldsymbol{A}(t_0)\|\;\|x(s)\|\mathrm{d}s\\&\leqslant M\mathrm{e}^{-a(t-t_0)}\|x_0\|+\int_{t_0}^{t}M\mathrm{e}^{-a(t-s)}K\|x(s)\|\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

即 $$\mathrm{e}^{a(t-t_0)}\|x(t)\|\leqslant M\|x_0\|+MK\int_{t_0}^{t}\mathrm{e}^{a(s-t_0)}\|x(s)\|\mathrm{d}s.$$

由格隆威尔不等式,可得

$$\mathrm{e}^{a(t-t_0)}\|x(t)\|\leqslant M\|x_0\|\mathrm{e}^{MK(t-t_0)},$$

即 $\quad \|x(t)\| \leqslant M\|x_0\| e^{(MK-a)(t-t_0)} \leqslant M\|x_0\| e^{-a(t-t_0)/2}$.

从而,知方程组①的零解是渐近稳定的.

例20 如果 n 维齐次线性方程组

$$\frac{dx}{dt}=A(t)x \qquad ①$$

的每一个解 $x=x(t)$ 当 $t\to+\infty$ 时,都趋于零解 $x=0$,证明它的每一个解是渐近稳定的.

证 设方程组①的任一解 $x=x(t)$ 是连续的,且当 $t\to+\infty$ 时, $x(t)\to0$.

设 $x=y(t)$ 是方程的另一解,则由

$$\lim_{t\to+\infty}[x(t)-y(t)]=\lim_{t\to+\infty}x(t)-\lim_{t\to+\infty}y(t)=0 \qquad ②$$

知,对于任给的 $\varepsilon>0$,存在 $t_0>0$,当 $t>t_0$ 时,有

$$|x(t)-y(t)|<\varepsilon.$$

再由解对初值的依赖性知,存在 $\delta>0$,当 $|x(0)-y(0)|<\delta$ 时, $0\leqslant t\leqslant t_0$,有 $|x(t)-y(t)|<\varepsilon$. 从而,解 $x=x(t)$ 是稳定的,由式②知它也是渐近稳定的.

例21 设 $g(t)$, $f(t)$ 在区间 $0\leqslant t<+\infty$ 上连续,证明方程

$$\frac{dx}{dt}=g(t)x+f(x) \qquad ①$$

的任一解

(1) 当 $\int_0^{+\infty}g(t)dt<+\infty$ 时,是稳定的;

(2) 当 $\int_0^{+\infty}g(t)dt=-\infty$ 时,是渐近稳定的;

(3) 当 $\int_0^{+\infty}g(t)dt=+\infty$ 时,是不稳定的.

证 设 $x=x_1(t)$ 是方程①的任一解, $x=x_2(t)$ 是方程①的另一解. 于是,它们的差 $y(t)=x_2(t)-x_1'(t)$ 满足齐次方程

$$\frac{dy}{dt}=g(t)y, \qquad ②$$

从而,问题化为讨论齐次方程②的零解的稳定性问题. 方程②的满

足初始条件 $y(0)=y_0$ 的解为

$$y=y_0\mathrm{e}^{\int_0^t g(s)\mathrm{d}s}.$$

（1）当 $\int_0^{+\infty}g(t)\mathrm{d}t<+\infty$ 时，$\lim\limits_{t\to+\infty}\int_0^t g(s)\mathrm{d}s$ 存在．由 $g(t)$ 的连续性知，当 $t\in[0,+\infty)$ 时，$\int_0^t g(s)\mathrm{d}s$ 是有界的，即

$$\left|\int_0^t g(s)\mathrm{d}s\right|<M,\quad t\in[0,+\infty),\quad M>0.$$

则对任给的 $\varepsilon>0$，可取 $\delta=\varepsilon\mathrm{e}^{-M}$，故当 $|y_0|<\delta$ 时，

$$|y(t)|\leqslant|y_0|\mathrm{e}^{M}<\varepsilon,\quad t\in[0,+\infty),$$

所以，方程②的零解是稳定的，从而方程①的任一解是稳定的．

（2）当 $\int_0^{+\infty}g(t)\mathrm{d}t=-\infty$ 时，$\lim\limits_{t\to+\infty}\mathrm{e}^{\int_0^t g(s)\mathrm{d}s}=0$，则当 $t\in[0,+\infty)$ 时，$\mathrm{e}^{\int_0^t g(s)\mathrm{d}s}$ 是有界的，即

$$\left|\mathrm{e}^{\int_0^t g(s)\mathrm{d}s}\right|<M,\quad t\in[0,+\infty),\quad M>0.$$

故对任给的 $\varepsilon>0$，可取 $\delta=\varepsilon/M$．于是，当 $|y_0|<\delta$ 时，对 $t\in[0,+\infty)$，有

$$|y(t)|<\varepsilon,\quad t\in[0,+\infty),$$

且 $\lim\limits_{t\to+\infty}y_0\mathrm{e}^{\int_0^t g(s)\mathrm{d}s}=0$．所以，方程②的零解是渐近稳定的，从而方程①的任一解是渐近稳定的．

（3）当 $\int_0^{+\infty}g(t)\mathrm{d}t=+\infty$ 时，对任意的 $|y_0|\neq0$，必存在 $t_1>0$，使得 $\mathrm{e}^{\int_0^{t_1}g(s)\mathrm{d}s}>\frac{2}{|y_0|}$，故可取 $\varepsilon_0=1$，对任意的 $\delta>0$，存在 $y_0\neq0$，$|y_0|<\delta$，使 $t=t_1$ 时，有

$$|y(t_1)|=\left|y_0\mathrm{e}^{\int_0^{t_1}g(s)\mathrm{d}s}\right|\geqslant2>1=\varepsilon_0,$$

所以，知方程②的零解是不稳定的，从而方程①的任一解都是不稳定的．

第六章　一阶偏微分方程初步

本章借助特征常微分方程组，讨论求一阶线性偏微分方程的通解与柯西(Cauchy)问题解的方法.

第一节　一阶常微分方程组的首次积分

主要内容

1. 偏微分方程就是联系着多个自变量，未知函数及其某些偏导数的关系式.

一阶偏微分方程的一般形式为

$$F\left(x_1, x_2, \cdots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)=0, \tag{①}$$

其中 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为自变量，u 为未知函数.

其初值问题(柯西问题)是求方程①的满足条件

$$u\Big|_{x_i=x_i^0}=\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots, x_n)$$

的解，其中 i 为 $1,2,\cdots,n$ 中的一个，$\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots, x_n)$ 为某一给定的函数.

2. $$X_1(x_1, x_2, \cdots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_1}+X_2(x_1, x_2, \cdots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_2}+\cdots +X_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_n}=0 \tag{②}$$

称为**一阶线性齐次偏微分方程**. 以后总假定 $X_i(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，$i=1,2,\cdots,n$ 在 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 空间的某个区域 D 内连续，对各个自变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的偏导数有界，且 X_i 在 D 内不同时为零.

$$X_1(x_1,x_2,\cdots,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_1}+X_2(x_1,x_2,\cdots,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_2}+\cdots$$
$$+X_n(x_1,x_2,\cdots,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_n}=R(x_1,x_2,\cdots,x_n,u) \quad ③$$

称为**一阶拟线性非齐次偏微分方程**. 以后总假定各$X_i(i=1,2,\cdots,n)$和R在$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$空间的某个区域D_1内连续且不同时为零，对各个自变量的偏导数有界.

3. 设函数$u=u(x_1,x_2,\cdots,x_n)$及其偏导数在某一区域上连续，若将u及其偏导数代入方程①中，能使方程①成为恒等式，则称u为方程①在该区域上的**解**.

4. 一般的一阶常微分方程组形如

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x}=f_1(x,y_1,y_2,\cdots,y_n),\\ \dfrac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x}=f_2(x,y_1,y_2,\cdots,y_n),\\ \quad\vdots\\ \dfrac{\mathrm{d}y_n}{\mathrm{d}x}=f_n(x,y_1,y_2,\cdots,y_n).\end{cases} \quad ④$$

定义 6.1 如果方程组④的任何一个解$y_1(x),y_2(x),\cdots,y_n(x)$代入连续可微函数$\Phi(x,y_1,y_2,\cdots,y_n)$，使函数$\Phi(x,y_1(x),y_2(x),\cdots,y_n(x))$恒等于某一常数(此常数与所取的解有关)，则函数$\Phi(x,y_1,y_2,\cdots,y_n)$称为方程组④的一个**首次积分**.

定义 6.2 设$\Phi_i(x,y_1,y_2,\cdots,y_n)(i=1,2,\cdots,k\leqslant n)$是方程组④的$k$个首次积分. 如果矩阵

$$\begin{pmatrix}\dfrac{\partial\Phi_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial\Phi_1}{\partial y_2} & \cdots & \dfrac{\partial\Phi_1}{\partial y_n}\\ \dfrac{\partial\Phi_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial\Phi_2}{\partial y_2} & \cdots & \dfrac{\partial\Phi_2}{\partial y_n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \dfrac{\partial\Phi_k}{\partial y_1} & \dfrac{\partial\Phi_k}{\partial y_2} & \cdots & \dfrac{\partial\Phi_k}{\partial y_n}\end{pmatrix}$$

中某个k阶子矩阵的行列式(也称k阶子式)不为零,则称$\Phi_i(x,y_1,y_2,\cdots,y_n)(i=1,2,\cdots,k)$是方程组④的$k$个独立的首次积分.

疑 难 解 析

怎样求首次积分?

答 通常用可积组合法求首次积分.

一般地,每个方程中都含几个未知函数,不大可能从一个方程中通过积分的方法求得未知函数. 但是,可以经过一些运算,将其中一些方程(甚至全部)组合起来,就有可能构成可以积分的形式,可能是$\mathrm{d}\Phi(x,y_1,y_2,\cdots,y_n)=0$或者代换成一个未知函数的可积方程.将这两种情形的可积方程积分后,得到的一个含有任意常数C的等式,即是一个首次积分.这种将方程式组合起来求首次积分的方法称可积组合法.

在用可积组合法求首次积分时,常将微分方程组写成对称的形式,如

$$\frac{\mathrm{d}y_1}{f_1}=\frac{\mathrm{d}y_2}{f_2}=\cdots=\frac{\mathrm{d}y_n}{f_n}=\frac{\mathrm{d}x}{1}.$$

这种形式的微分方程组在用可积组合法求它的首次积分时,可以利用比例的许多性质,如合比定理与分比定理等.

例如,求解方程组 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=x.$

将两个方程相加,得$\frac{\mathrm{d}(x+y)}{\mathrm{d}t}=x+y$. 以$x+y$作为一个未知函数,对方程积分,得首次积分

$$x+y=C_1\mathrm{e}^t.$$

将两个方程相减,得$\frac{\mathrm{d}(x-y)}{\mathrm{d}t}=-(x-y)$. 以$x-y$作为一个未知函数,对方程积分,得首次积分

$$x-y=C_2\mathrm{e}^{-t}.$$

从而，可得方程组的通解为

$$\begin{cases} x=(C_1e^t+C_2e^{-t})/2, \\ y=(C_1e^t-C_2e^{-t})/2. \end{cases}$$

又如，求解方程组

$$\frac{dy}{dx}=\frac{z+x}{y+z}, \quad \frac{dz}{dx}=\frac{x+y}{y+z}.$$

先将方程化为对称形式

$$\frac{dx}{y+z}=\frac{dy}{z+x}=\frac{dz}{x+y},$$

应用合比性质，得

$$\frac{dx-dy}{y-x}=\frac{dy-dz}{z-y},$$

即
$$\frac{d(x-y)}{x-y}=\frac{d(y-z)}{y-z},$$

积分，得
$$x-y=C_1(y-z) \Rightarrow \frac{x-y}{y-z}=C_1. \qquad ①$$

再用合比性质，得

$$\frac{dx+dy+dz}{2(x+y+z)}=\frac{dy-dz}{z-y},$$

即
$$\frac{1}{2}\frac{d(x+y+z)}{x+y+z}=-\frac{d(y-z)}{y-z},$$

积分，得

$$(x+y+z)^{1/2}=C_2(y-z)^{-1} \Rightarrow (x+y+z)^{1/2}(y-z)=C_2. \qquad ②$$

从而，方程组的通积分为

$$\begin{cases} \dfrac{x-y}{y-z}=C_1, \\ (x+y+z)^{1/2}(y-z)=C_2. \end{cases}$$

方法、技巧与典型例题分析

例 1 求下列方程组的首次积分与通积分：

(1) $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{y}{x-y},\\ \dfrac{dy}{dt}=\dfrac{x}{x-y};\end{cases}$ (2) $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y,\\ \dfrac{dy}{dt}=\dfrac{y^2}{x};\end{cases}$

(3) $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y,\\ \dfrac{dy}{dt}=-x+3;\end{cases}$ (4) $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{y}{(y-x)^2},\\ \dfrac{dy}{dt}=\dfrac{x}{(y-x)^2}.\end{cases}$

解 (1) 将第一式两端乘以 x,第二式两端乘以 y,然后相减,得

$$x\frac{dx}{dt}-y\frac{dy}{dt}=0\overset{\text{积分}}{\Longrightarrow}x^2-y^2=C_1,$$

得第一个首次积分 $x^2-y^2=C_1$.

再将第一式两端减去第二式两端,得

$$\frac{dx}{dt}-\frac{dy}{dt}=-\frac{y-x}{x-y}\overset{\text{积分}}{\Longrightarrow}x-y=-t+C_2,$$

得第二个首次积分 $x-y+t=C_2$.

于是,方程组的通积分为

$$\begin{cases}x^2-y^2=C_1,\\ x-y+t=C_2.\end{cases}$$

(2) 微分第一式,得 $\dfrac{d^2x}{dt^2}=\dfrac{dy}{dt}$. 代入原方程组各式,得

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{y^2}{x}=\frac{1}{x}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\Rightarrow\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{1}{x}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=0.$$

令 $\dfrac{dx}{dt}=p$,则 $\dfrac{d^2x}{dt^2}=p\dfrac{dp}{dx}$,上式化为

$$p\frac{dp}{dx}-\frac{1}{x}p^2=0\Rightarrow\frac{dp}{dx}-\frac{p}{x}=0.$$

分离变量并积分,得

$$p=Cx\Rightarrow\frac{dx}{dt}=Cx.$$

再分离变量并积分,得 $x=C_2e^{C_1t}$.

由原方程组第一式，得

$$y=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=C_1C_2\mathrm{e}^{C_1t}.$$

所以，原方程通解为

$$\begin{cases}x=C_2\mathrm{e}^{C_1t},\\ y=C_1C_2\mathrm{e}^{C_1t}.\end{cases}$$

(3) 微分第一式，得$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$. 代入原方程第二式，得

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-x+3.$$

令$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=p$，则$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$. 上式化为

$$\frac{p\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=-x+3 \Rightarrow p\mathrm{d}p=(-x+3)\mathrm{d}x,$$

两端积分，得

$$p=\pm\sqrt{6x-x^2+2C_1},$$

即

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\pm\sqrt{6x-x^2+2C_1}.$$

分离变量，得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(2C_1+9)^2-(x-3)^2}}=\pm\mathrm{d}t,$$

两端积分，得

$$\arcsin\frac{x-3}{\sqrt{2C_1+9}}=C_2\pm t,$$

即 $\sin(C_2\pm t)=\frac{x-3}{\sqrt{2C_1+9}} \Rightarrow x=\sqrt{2C_1+9}\sin(C_2\pm t)+3.$

由原方程组第一式，得

$$y=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\pm\sqrt{2C_1+9}\cos(C_2\pm t).$$

于是，原方程组通解为

$$\begin{cases}x=\sqrt{2C_1+9}\sin(C_2\pm t)+3,\\ y=\pm\sqrt{2C_1+9}\cos(C_2\pm t).\end{cases}$$

(4) 将方程组第一式除以第二式，得

$$\frac{dx}{dy}=\frac{y}{x}\overset{\text{积分}}{\Longrightarrow}x^2-y^2=C_1.$$

再由第二式减去第一式，得

$$\frac{d(x-y)}{dt}=\frac{-(x-y)}{(x-y)^2}.$$

将 $x-y$ 看作变量，分离变量并积分，得

$$t+\frac{1}{2}(x-y)^2=C_2.$$

因为两个首次积分相互独立，所以原方程组的通积分为

$$\begin{cases}x^2-y^2=C_1,\\ \frac{1}{2}(x-y)^2+t=C_2.\end{cases}$$

例 2 求下列方程组的首次积分与通积分：

(1) $\frac{dx}{xz}=\frac{dy}{yz}=\frac{dz}{xy}$; (2) $\frac{dx}{z-y}=\frac{dy}{x-z}=\frac{dz}{y-x}$;

(3) $\frac{dx}{y+z}=\frac{dy}{z+x}=\frac{dz}{x+y}$; (4) $\frac{dx}{y^2}=\frac{dy}{x^2}=\frac{dz}{x^2y^2z^2}$.

解 (1) 将方程化为 $\frac{ydx}{xyz}=\frac{xdy}{xyz}=\frac{zdz}{xyz}$，由合比定理，得

$$ydx+xdy=2zdz.$$

等式两端积分，得首次积分

$$xy-z^2=C_1.$$

由
$$\frac{dx}{xz}=\frac{dy}{yz}\Rightarrow\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}\Rightarrow x=yC_2,$$

得另一个线性无关的首次积分 $\frac{x}{y}=C_2$.

所以，原方程组通积分为

$$\begin{cases}xy-z^2=C_1,\\ \frac{x}{y}=C_2.\end{cases}$$

(2) 将三个分式的分子、分母依次相加，得

$$\frac{\mathrm{d}x+\mathrm{d}y+\mathrm{d}z}{z-y+x-z+y-x}=\frac{\mathrm{d}(x+y+z)}{0},$$

即有 $$\mathrm{d}(x+y+z)=0 \overset{积分}{\Longrightarrow} x+y+z=C_1.$$

用 x,y,z 分别乘三个分式后再相加，得

$$\frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z}{xz-yx+xy-yz+yz-xz}=\frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z}{0},$$

即有 $$\mathrm{d}(x^2+y^2+z^2)=0 \overset{积分}{\Longrightarrow} x^2+y^2+z^2=C_2.$$

所以，原方程组通积分为

$$\begin{cases} x+y+z=C_1, \\ x^2+y^2+z^2=C_2. \end{cases}$$

(3) 由第三分式减去第一分式等于第二分式减去第一分式，得

$$\frac{\mathrm{d}z-\mathrm{d}x}{x+y-y-z}=\frac{\mathrm{d}y-\mathrm{d}z}{z+x-y-z} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}(z-x)}{-(z-x)}=\frac{\mathrm{d}(y-x)}{-(y-x)},$$

两端积分，得

$$\ln(z-x)=\ln(y-x)+\ln C_1 \Rightarrow \frac{z-x}{y-x}=C_1.$$

又，第一分式减去第二分式等于三个分式相加，得

$$\frac{\mathrm{d}x-\mathrm{d}y}{y+z-z-x}=\frac{\mathrm{d}x+\mathrm{d}y+\mathrm{d}z}{y+z+z+x+x+y},$$

即 $$\frac{\mathrm{d}(x-y)}{-(x-y)}=\frac{\mathrm{d}(x+y+z)}{2(x+y+z)}.$$

两端积分，得

$$\ln(x-y)^2=\ln\frac{1}{(x+y+z)}+\ln C_2 \Rightarrow (x-y)^2(x+y+z)=C_2.$$

所以，原方程组通积分为

$$\begin{cases} \dfrac{z-x}{y-x}=C_1, \\ (x-y)^2(x+y+z)=C_2. \end{cases}$$

(4) 将原式前一等式两端分离后积分，得

$$\frac{\mathrm{d}x}{y^2}=\frac{\mathrm{d}y}{x^2}\overset{\text{积分}}{\Longrightarrow}x^3-y^3=3C_1.$$

再将原式后一等式化简后分离并积分，得

$$\frac{\mathrm{d}y}{x^2}=\frac{\mathrm{d}z}{x^2y^2z^2}\Rightarrow\frac{\mathrm{d}y}{1}=\frac{\mathrm{d}z}{y^2z^2}\overset{\text{积分}}{\Longrightarrow}y^3+\frac{3}{z}=3C_2.$$

所以，原方程组通积分为

$$\begin{cases}x^3-y^3=3C_1,\\ y^3+\dfrac{3}{z}=3C_2.\end{cases}$$

例3 求下列方程组的首次积分与通积分：

(1) $\dfrac{a\mathrm{d}x}{(b-c)yz}=\dfrac{b\mathrm{d}y}{(c-a)zx}=\dfrac{c\mathrm{d}z}{(a-b)xy}$;

(2) $\dfrac{\mathrm{d}x}{x(x+y)}=\dfrac{\mathrm{d}y}{-y(x+y)}=\dfrac{\mathrm{d}z}{(y-x)(2x+2y+z)}$.

解 (1) 用 x,y,z 分别乘一、二、三分式后相加，得

$$\frac{ax\mathrm{d}x+by\mathrm{d}y+cz\mathrm{d}z}{(b-c)xyz+(c-a)xyz+(a-b)xyz}=\frac{ax\mathrm{d}x+by\mathrm{d}y+cz\mathrm{d}z}{0},$$

即有 $\qquad ax\mathrm{d}x+by\mathrm{d}y+cz\mathrm{d}z=0\overset{\text{积分}}{\Longrightarrow}ax^2+by^2+cz^2=C_1.$

再用 ax,by,cz 分别乘一、二、三分式后相加，得

$$\frac{a^2x\mathrm{d}x+b^2y\mathrm{d}y+c^2z\mathrm{d}z}{a(b-c)xyz+b(c-a)xyz+c(a-b)xyz}=\frac{a^2x\mathrm{d}x+b^2y\mathrm{d}y+c^2z\mathrm{d}z}{0},$$

即有 $\quad a^2x\mathrm{d}x+b^2y\mathrm{d}y+c^2z\mathrm{d}z=0\overset{\text{积分}}{\Longrightarrow}a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2=C_2.$

所以，原方程组通积分为

$$\begin{cases}ax^2+by^2+cz^2=C_1,\\ a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2=C_2.\end{cases}$$

(2) 由第一分式与第二分式，得

$$\frac{\mathrm{d}x}{x(x+y)}=\frac{\mathrm{d}y}{-y(x+y)}\Rightarrow\frac{\mathrm{d}x}{x}=-\frac{\mathrm{d}y}{y},$$

两端积分，得 $\qquad xy=C_1.$

由第一分式加第二分式等于三个分式相加，得

$$\frac{\mathrm{d}(x+y)}{x+y}=-\frac{\mathrm{d}(x+y+z)}{x+y+z},$$

两端积分，得

$$(x+y)(x+y+z)=C_2.$$

所以，原方程组通积分为

$$\begin{cases}xy=C_1,\\(x+y)(x+y+z)=C_2.\end{cases}$$

一般地，两个首次积分是否线性无关不需特别证明. 在求出后，容易加以判断.

例 4 求解方程组：

$$(1)\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y-x(x^2+y^2-1),\\[2ex]\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-x-y(x^2+y^2-1);\end{cases}\qquad(2)\begin{cases}(z-y)^2\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=z,\\[2ex](z-y)^2\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=y.\end{cases}$$

解 (1) 将第一式乘以 x 加上第二式乘以 y，得

$$x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-(x^2+y^2)(x^2+y^2-1),$$

即得 $$\mathrm{d}(x^2+y^2)=-2(x^2+y^2)(x^2+y^2-1)\mathrm{d}t.$$

将 x^2+y^2 看作变量，对上式两端分离变量后积分，得

$$\frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2}\mathrm{e}^{2t}=C_1\Rightarrow x^2+y^2=\frac{\mathrm{e}^{2t}}{\mathrm{e}^{2t}-C_1}. \qquad ①$$

再将第二式乘以 x 减去第一式乘以 y，得

$$x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}-y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-(x^2+y^2)\Rightarrow\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\arctan\frac{y}{x}\right)=-1,$$

分离变量后积分，得

$$\arctan\frac{y}{x}+t=C_2. \qquad ②$$

利用极坐标 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ 代入式①、式②，得

$$r=1\Big/\sqrt{1-C_1\mathrm{e}^{-2t}},\quad \theta=C_2-t.$$

所以，原方程组通解为

$$\begin{cases} x=\dfrac{\cos(C_2-t)}{\sqrt{1-C_1\mathrm{e}^{-2t}}}, \\ y=\dfrac{\sin(C_2-t)}{\sqrt{1-C_1\mathrm{e}^{-2t}}}. \end{cases}$$

（2）原方程组可改写为

$$\frac{\mathrm{d}x}{(z-y)^2}=\frac{\mathrm{d}y}{z}=\frac{\mathrm{d}z}{y},$$

由后一等式得$\dfrac{\mathrm{d}y}{z}=\dfrac{\mathrm{d}z}{y}$，分离变量后积分，得

$$y^2-z^2=C_1.$$

再由比例性质，得

$$\frac{\mathrm{d}x}{(z-y)^2}=\frac{\mathrm{d}y-\mathrm{d}z}{z-y}\Rightarrow \mathrm{d}x=-(z-y)\mathrm{d}(z-y).$$

视 $z-y$ 为变量，两端积分，得

$$2x+(z-y)^2=C_2.$$

所以，原方程组通积分为

$$\begin{cases} y^2-z^2=C_1, \\ 2x+(z-y)^2=C_2. \end{cases}$$

例 5　设 $V_i(x,y_1,y_2,\cdots,y_n)=C_i(i=1,2,\cdots,k;1\leqslant k\leqslant n-1)$ 是方程组

$$\frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}x}=f_i(x,y_1,y_2,\cdots,y_n)\quad(i=1,2,\cdots,n)\qquad ①$$

在区域$G\subseteq\mathbf{R}^{n+1}$内的$k$ 个独立的首次积分. 证明：利用k 个首次积分可以将方程组①降为只含$n-k$ 个未知函数，由$n-k$ 个一阶方程构成的方程组.

证　设 $V_i(x,y_1,y_2,\cdots,y_n)=C_i$ $(i=1,2,\cdots,k)$是方程组①的 k 个独立的首次积分，且行列式

$$\frac{D(V_1,V_2,\cdots,V_k)}{D(y_{n-(k-1)},\cdots,y_n)}\neq 0,\quad (x,y_1,y_2,\cdots,y_n)\in G$$

由 $V_i(x,y_1,y_2,\cdots,y_n)=C_i$ 可得

$$y_{n-j}=\varphi_{n-j}(x,y_1,y_2,\cdots,y_{n-k};C_1,C_2,\cdots,C_k)$$
$$(j=0,1,\cdots,k-1). \qquad ②$$

将式②代入方程组①的前 $n-k$ 个方程，即可将方程组①化为求 $y_1,y_2,\cdots,y_{n-k}$ 的 $n-k$ 个方程：

$$\frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}x}=f_i(x,y_1,y_2,\cdots,y_{n-k},\varphi_{n-k+1}(x,y_1,\cdots,y_{n-k};C_1,\cdots,C_k),$$
$$\cdots\varphi_n(x,y_1,\cdots,y_{n-k};C_1,\cdots,C_k)) \quad (i=1,2,\cdots,k).$$

求出上面这 $n-k$ 个方程的解

$$y_i=\psi_i(x;C_1,\cdots,C_k) \quad (i=1,2,\cdots,k),$$

则由 $\frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}x}(i=k+1,k+2,\cdots,n)$ 和首次积分性质，可以证明

$$y_i=\psi_i(x;C_1,\cdots,C_k) \quad (i=1,2,\cdots,k)$$

与 $$y_{n-j}=\varphi_{n-j}(x,\psi_1(x;C_1,\cdots,C_k),\cdots,\psi_{n-k}(x;C_1,\cdots,C_k))$$
$$(i=1,2,\cdots,n-k;j=0,1,\cdots,k-1)$$

就是方程组①的解，所以方程组①降为只含 $n-k$ 个未知函数，由 $n-k$ 个一阶方程构成的方程组.

第二节 一阶线性齐次偏微分方程

主要内容

设有方向场

$$\boldsymbol{F}=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k},$$

若有曲线族的每一条曲线都处处与方向场的方向 $\boldsymbol{F}$ 相切，则这样的曲线称为 $\boldsymbol{F}$ 的**特征曲线**. 特征曲线的微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}x}{P(x,y,z)}=\frac{\mathrm{d}y}{Q(x,y,z)}=\frac{\mathrm{d}z}{R(x,y,z)}. \qquad ①$$

求特征曲线就是求解微分方程组①. 方程组①称为方向场 $\boldsymbol{F}$ 的特

征方程组. 全体特征曲线"编织"成方向场$\boldsymbol{F}$的积分曲面.

1. 一阶线性齐次偏微分方程

$$X_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)\frac{\partial u}{\partial x_1}+X_2(x_1,x_2,\cdots,x_n)\frac{\partial u}{\partial x_2}+\cdots$$

$$+X_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)\frac{\partial u}{\partial x_n}=0 \qquad ②$$

的**特征方程组**是

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{X_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)}=\frac{\mathrm{d}x_2}{X_2(x_1,x_2,\cdots,x_n)}=\cdots$$

$$=\frac{\mathrm{d}x_n}{X_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)}, \qquad ③$$

方程组③的一个解称为方程②的**特征曲线**,简称**特征**.

方程组③可写成等价的方程组

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}x_n}=\frac{X_1}{X_n},\ \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}x_n}=\frac{X_2}{X_n},\ \cdots,\ \frac{\mathrm{d}x_{n-1}}{\mathrm{d}x_n}=\frac{X_{n-1}}{X_n}. \qquad ④$$

定理6.1 连续可微函数$u=\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是方程②的解的充分必要条件为$\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是特征方程组③(或④)的首次积分.

特征方程组③(或④)有无穷多个首次积分,因此方程②有无穷多个解.

定理6.2 如果$\varphi_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ $(i=1,2,\cdots,n-1)$是方程组③的$n-1$个独立的首次积分,则它们的任意的连续可微函数

$$u=\Phi(\varphi_1(x_1,x_2,\cdots,x_n),\cdots,\varphi_{n-1}(x_1,x_2,\cdots,x_n))$$

是方程②的通解,即包含了方程②的所有的解.

2. 方程②的柯西问题的解法 求方程②的满足初始条件

$$u\Big|_{x_n=x_n^0}=\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

的解. 由于方程②的通解为

$$u=\Phi(\varphi_1(x_1,x_2,\cdots,x_n),\cdots,\varphi_{n-1}(x_1,x_2,\cdots,x_n)),$$

所以,柯西问题化为找到$n-1$个如下的函数:

$$\omega_i=(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_{n-1}) \quad (i=1,2,\cdots,n-1).$$

使得

$$\begin{cases} x_1=\omega_1(\varphi_1(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},x_n^0),\cdots,\varphi_{n-1}(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},x_n^0)), \\ x_2=\omega_2(\varphi_1(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},x_n^0),\cdots,\varphi_{n-1}(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},x_n^0)), \\ \quad\vdots \\ x_{n-1}=\omega_{n-1}(\varphi_1(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},x_n^0),\cdots,\varphi_{n-1}(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},x_n^0)). \end{cases}$$

则函数

$$\Phi=\varphi(\omega_1(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_{n-1}),\cdots,\omega_{n-1}(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_{n-1})),$$

使得 $\Phi(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_{n-1})\Big|_{x_n=x_n^0}=\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1})$ 是方程②的一个解.

疑 难 解 析

1. 怎样求一阶线性齐次偏微分方程的通解?

答 求一阶线性齐次偏微分方程②的步骤可归纳如下:

(1) 写出方程②的特征方程组③;

(2) 求出特征方程组③的 $n-1$ 个独立的首次积分 $\varphi_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ $(i=1,2,\cdots,n-1)$;

(3) 写出通解 $u=\Phi(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_{n-1})$.

显然,关键是求出 $n-1$ 个独立的首次积分,同时,应该认识到:与常微分方程的通解不同,偏微分方程②的通解不仅含有任意常数,而且它本身是以其特征常微分方程组的 $n-1$ 个独立的首次积分为变元的任意函数.

例如,偏微分方程 $y\dfrac{\partial z}{\partial x}-x\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$,其特征方程组为

$$\frac{\mathrm{d}x}{y}=-\frac{\mathrm{d}y}{x}.$$

分离变量并两端积分,得一个首次积分

$$\varphi=x^2+y^2,$$

所以,齐次方程通解为 $z=\Phi(\varphi)=\Phi(x^2+y^2)$.

在几何上，这个通解表示以 z 轴为旋转轴的旋转曲面族. 当 $\Phi(\varphi)=\varphi$ 时，得旋转抛物面 $z=x^2+y^2$；当 $\Phi(\varphi)=\sqrt{R^2-\varphi}$ 时，得(旋转)球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$；当 $\Phi(\varphi)=\sqrt{\varphi}$ 时，得圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$；当 $\Phi(\varphi)=C$(常数)时，得平面 $z=C$.

2. 求初值(柯西)问题的解有哪些步骤?

答 求初值问题的步骤可归纳如下.

(1) 写出齐次方程②的特征方程组③，求出它的 $n-1$ 个独立的首次积分.

(2) 建立等式组

$$\begin{aligned}\varphi_1(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},x_n^0)&=\overline{\varphi}_1,\\\varphi_2(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},x_n^0)&=\overline{\varphi}_2,\\&\vdots\\\varphi_{n-1}(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},x_n^0)&=\overline{\varphi}_{n-1}.\end{aligned}$$

由等式组解出 $x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}$，即

$$\begin{aligned}x_1&=\omega_1(\overline{\varphi}_1,\overline{\varphi}_2,\cdots,\overline{\varphi}_{n-1}),\\x_2&=\omega_2(\overline{\varphi}_1,\overline{\varphi}_2,\cdots,\overline{\varphi}_{n-1}),\\&\vdots\\x_{n-1}&=\omega_{n-1}(\overline{\varphi}_1,\overline{\varphi}_2,\cdots,\overline{\varphi}_{n-1}).\end{aligned}$$

(3) 构成初值问题解

$$\begin{aligned}&\Phi(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_{n-1})\\&=\varphi(\omega_1(\varphi_1(x_1,x_2,\cdots,x_n),\varphi_2(x_1,x_2,\cdots,\varphi_n),\cdots,\\&\quad\varphi_{n-1}(x_1,x_2,\cdots,x_n)),\omega_2(\varphi_1(x_1,x_2,\cdots,x_n),\varphi_2(x_1,x_2,\cdots,\varphi_n),\\&\quad\cdots,\varphi_{n-1}(x_1,x_2,\cdots,x_n)),\cdots,\omega_{n-1}(\varphi_1(x_1,x_2,\cdots,x_n),\\&\quad\varphi_2(x_1,x_2,\cdots,x_n),\cdots,\varphi_{n-1}(x_1,x_2,\cdots,x_n))).\end{aligned}$$

例如，求齐次偏微分方程

$$xy\frac{\partial u}{\partial z}+xz\frac{\partial u}{\partial y}+yz\frac{\partial u}{\partial x}=0$$

满足初始条件$u\Big|_{y=y_0}=f(x,z)$的解.

其特征方程组为

$$\frac{\mathrm{d}z}{xy}=\frac{\mathrm{d}y}{xz}=\frac{\mathrm{d}x}{yz}.$$

由$\frac{\mathrm{d}z}{xy}=\frac{\mathrm{d}y}{xz}$得第一个首次积分

$$\varphi_1=z^2-y^2.$$

由$\frac{\mathrm{d}y}{xz}=\frac{\mathrm{d}x}{yz}$得第二个首次积分

$$\varphi_2=x^2-y^2.$$

建立等式组,并解出x,z,得

$$\begin{cases}z^2-y_0^2=\bar{\varphi}_1,\\ x^2-y_0^2=\bar{\varphi}_2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\sqrt{\bar{\varphi}_2+y_0^2},\\ z=\sqrt{\bar{\varphi}_1+y_0^2},\end{cases}$$

所以,所求特解为

$$u=\varphi(\sqrt{\varphi_2+y_0^2},\sqrt{\varphi_1+y_0^2})=\varphi(\sqrt{x^2-y^2+y_0^2},\sqrt{z^2-y^2+y_0^2}).$$

3. 怎样建立偏微分方程?

答 建立偏微分方程常用以下两种方法.

(1) 消去常数建立偏微分方程.

设有关系式$\varphi(x,y,z,a,b)=0$,其中以x,y为自变量,z由x,y确定,a,b为常数.

对$\varphi(x,y,z,a,b)=0$求偏导数,得

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=0,\quad\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

消去常数a,b,得一阶偏微分方程

$$F\left(x,y,z,\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}\right)=0. \quad ⑤$$

当式⑤中消去常数的个数等于自变量个数时,得一阶偏微分方程.

例如，有关系式$z=axe^y+\frac{1}{2}a^2e^{2y}+b$，分别对$x,y$求偏导数，得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=ae^y,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=axe^y+a^2e^{2y}.$$

由$\frac{\partial z}{\partial x}=ae^y$解得$a=e^{-y}\frac{\partial z}{\partial x}$，代入$\frac{\partial z}{\partial y}$，得一阶偏微分方程

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x\frac{\partial z}{\partial x}+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2.$$

（2）消去函数建立偏微分方程.

设u,v为x,y,z的函数，且有关系式$\varphi(u,v)=0$，其中φ为任意可微函数.

式$\varphi(u,v)=0$分别对x,y求偏导数，得

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=0,$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

消去$\frac{\partial\varphi}{\partial u},\frac{\partial\varphi}{\partial v}$，得偏微分方程

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right)$$

或

$$P\frac{\partial z}{\partial x}+Q\frac{\partial z}{\partial y}=R, \qquad ⑥$$

其中

$$\begin{cases}P=\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial y},\\ Q=\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial z},\\ R=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}.\end{cases}$$

式⑥中已不含φ，而是$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$的线性关系式.

例如，有关系式$z=y^2+2f\left(\frac{1}{x}+\ln x\right)$. 分别对$x,y$求偏导数，得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{2}{x^2}f\left(\frac{1}{x}+\ln x\right),\quad \frac{\partial z}{\partial y}=2y+\frac{2}{y}f\left(\frac{1}{x}+\ln x\right).$$

由上述前一式中解得 $f\left(\frac{1}{x}+\ln x\right)=-\frac{x^2}{2}\frac{\partial z}{\partial x}$，代入后一式，即得偏微分方程

$$x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=2y^2.$$

方法、技巧与典型例题分析

例 1　形如 $a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=0$ 的方程的通解为

$$z=f(ay-bx). \qquad ①$$

试求 $3\frac{\partial z}{\partial x}+2\frac{\partial z}{\partial y}=0$ 的满足 $z(x,0)=4\mathrm{e}^{-x}$ 的特解.

解　将 $a=3,b=2$ 代入式①，得

$$z=f(3y-2x). \qquad ②$$

将 $z(x,0)=4\mathrm{e}^{-x}$ 代入式②，得

$$f(-2x)=4\mathrm{e}^{-x}.$$

设 $-2x=t$，则 $-x=t/2$，从而

$$f(t)=4\mathrm{e}^{t/2}\Rightarrow f(3y-2x)=4\mathrm{e}^{(3y-2x)/2},$$

所以，方程 $3\frac{\partial z}{\partial x}+2\frac{\partial z}{\partial y}=0$，满足 $z(x,0)=4\mathrm{e}^{-x}$ 的特解为

$$z=4\mathrm{e}^{(3y-2x)/2}.$$

例 2　形如 $a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=C$ 的方程的通解为

$$z=f(ay-bx)+\frac{C}{b}y\quad 或\quad z=f(ay-bx)+\frac{C}{a}x,$$

试求 $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=1$ 的通解.

解　因为 $a=b=1,C=1$，所以方程的通解为

$$z=f(y-x)+x.$$

例 3 形如 $a\dfrac{\partial z}{\partial x}+b\dfrac{\partial z}{\partial y}=Cz$ 的方程的通解为

$$z=\mathrm{e}^{Cx/a}f(ay-bx) \quad 或 \quad z=\mathrm{e}^{Cy/b}f(ay-bx), \tag{①}$$

试求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}-2\dfrac{\partial z}{\partial y}=z$ 满足 $z(x,0)=3\mathrm{e}^{-5x}+2\mathrm{e}^{-3x}$ 的特解.

解 由式①,因为 $a=1,b=-2,C=1$,故通解为

$$z=\mathrm{e}^{-y/2}f(y+2x).$$

代入 $z(x,0)=3\mathrm{e}^{-5x}+2\mathrm{e}^{-3x}$,得

$$f(2x)=3\mathrm{e}^{-5x}+2\mathrm{e}^{-3x}.$$

设 $2x=t$,则有 $f(t)=3\mathrm{e}^{-5t/2}+2\mathrm{e}^{-3t/2}$. 于是

$$f(y+2x)=3\mathrm{e}^{-5(y+2x)/2}+2\mathrm{e}^{-3(y+2x)/2},$$

故特解为

$$z=3\mathrm{e}^{-3y-5x}+2\mathrm{e}^{-2y-3x}.$$

例 4 形如 $\dfrac{\partial z}{\partial x}+m\dfrac{\partial z}{\partial y}=\varphi(x,y)$ (m 为常数)的方程的通解为

$$z=f(y-mx)+\psi(x,y-mx),$$

试求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=x^2y+xy^2$ 的通解.

解 因为 $m=1$,所以

$$f(y-mx)=f(y-x).$$

而 $\psi(x,y-mx)$ 由 $\dfrac{1}{D+mD_1}(x^2y+xy^2)$ 求出,其中

$$D=\frac{\partial}{\partial x},\quad D_1=\frac{\partial}{\partial y},$$

故

$$\begin{aligned}\psi(x,y-m)&=\frac{1}{D+D_1}(x^2y+xy^2)\\&=\mathrm{e}^{-xD_1}\frac{1}{D}[x^2(y+x)+x(y+x)^2]\\&=\mathrm{e}^{-xD_1}\frac{1}{D}(3x^2y+xy^2+2x^3)\\&=\mathrm{e}^{-xD_1}\int(3x^2y+xy^2+2x^3)\mathrm{d}x\\&=\mathrm{e}^{-xD_1}\left(x^3y+\frac{1}{2}x^2y^2+\frac{1}{2}x^4\right)\end{aligned}$$

$$=x^3(y-x)+\frac{1}{2}x^2(y-x)^2+\frac{1}{2}x^4=\frac{1}{2}x^2y^2.$$

故方程的通解为 $$z=f(y-x)+\frac{1}{2}x^2y^2.$$

例 5 求下列方程的通解：

(1) $y\frac{\partial z}{\partial x}+x\frac{\partial z}{\partial y}=0$； (2) $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=0$；

(3) $y\frac{\partial u}{\partial x}+z\frac{\partial u}{\partial z}=0$； (4) $(x+y)\frac{\partial z}{\partial x}-(x-y)\frac{\partial z}{\partial y}=0$.

解 按疑难解析 1 中方法求解.

(1) 特征方程组为 $\frac{\mathrm{d}x}{y}=\frac{\mathrm{d}y}{x}$，两端积分，得

$$x^2-y^2=C \Rightarrow \varphi=x^2-y^2,$$

故通解为 $$z=\Phi(\varphi)=\Phi(x^2-y^2).$$

(2) 特征方程为 $$\frac{\mathrm{d}x}{1}=\frac{\mathrm{d}y}{1}=\frac{\mathrm{d}z}{1}.$$

由 $\frac{\mathrm{d}x}{1}=\frac{\mathrm{d}y}{1}$ 得第一个首次积分

$$\varphi_1=x-y.$$

由 $\frac{\mathrm{d}y}{1}=\frac{\mathrm{d}z}{1}$ 得第二个首次积分

$$\varphi_2=y-z.$$

由于两个首次积分独立，故原方程通解为

$$\Phi(\varphi_1,\varphi_2)=\Phi(x-y,y-z).$$

(3) 特征方程组为 $$\frac{\mathrm{d}x}{y}=\frac{\mathrm{d}y}{0}=\frac{\mathrm{d}z}{z}.$$

由 $\mathrm{d}y=0$ 得第一个首次积分

$$\varphi_1=y \quad (=C_1),$$

将 $y=C_1$ 代入，有 $\frac{\mathrm{d}x}{C_1}=\frac{\mathrm{d}z}{z}$，得 $z=C_2\mathrm{e}^{x/C_1}$. 再将 $y=C_1$ 代入此式，得第二个首次积分

$$\varphi_2=z\mathrm{e}^{-x/y}.$$

所以，原方程通解为

$$u=\Phi(\varphi_1,\varphi_2)=\Phi(y,ze^{-x/y}).$$

(4) 特征方程组为$\dfrac{dx}{x+y}=\dfrac{dy}{-(x-y)}$. 其通积分为

$$\sqrt{x^2+y^2}e^{\arctan\frac{y}{x}}=C,$$

所以,原方程通解为

$$z=\Phi(\sqrt{x^2+y^2}e^{\arctan\frac{y}{x}}).$$

例 6 求下列方程的解:

(1) $2x\dfrac{\partial u}{\partial z}-\ln z\dfrac{\partial u}{\partial x}+(\ln z-2x)\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$;

(2) $(4y-5x)\dfrac{\partial u}{\partial z}+(5z-3y)\dfrac{\partial u}{\partial x}+(3x-4z)\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$;

(3) $(mz-ny)\dfrac{\partial u}{\partial x}+(nx-lz)\dfrac{\partial u}{\partial y}+(ly-mx)\dfrac{\partial u}{\partial z}=0$;

(4) $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}+(z+\sqrt{x^2+y^2+z^2})\dfrac{\partial u}{\partial z}=0$.

解 (1) 特征方程组为

$$\frac{dz}{2x}=\frac{dx}{-\ln z}=\frac{dy}{\ln z-2x}.$$

由$\dfrac{dz}{2x}=\dfrac{dx}{-\ln z}$分离变量后积分,得第一个首次积分

$$\varphi_1=z(\ln z-1)+x^2.$$

由比例性质,得

$$\frac{dz}{2x}=\frac{dx}{-\ln z}=\frac{dy}{\ln z-2x}=\frac{dx+dy+dz}{0},$$

知$d(x+y+z)=0$,得第二个首次积分

$$\varphi_2=x+y+z.$$

所以,原方程通解为

$$u=\Phi(\varphi_1,\varphi_2)=\Phi(z(\ln z-1)+x^2,x+y+z).$$

其中Φ为任意二元连续可微函数.

(2) 特征方程组为

$$\frac{dz}{4y-5x}=\frac{dx}{5z-3y}=\frac{dy}{3x-4z}.$$

将上面的第一、二、三分式分别乘以 3，4，5 后，分子、分母分别相加，由比例性质，得

$$\frac{dz}{4y-5x}=\frac{dx}{5z-3y}=\frac{dy}{3x-4z}=\frac{3dz+4dx+5dy}{0},$$

知
$$d(3z+4x+5y)=0,$$

得第一个首次积分 $\varphi_1=3z+4x+5y.$

再将第一、二、三分式分别乘以 $2z,2x,2y$ 后，分子、分母分别相加，由比例性质，得

$$\frac{2zdz}{2z(4y-5x)}=\frac{2xdx}{2x(5z-3y)}=\frac{2ydy}{2y(3x-4z)}=\frac{2zdz+2xdx+2ydy}{0},$$

知
$$d(z^2+x^2+y^2)=0,$$

得第二个首次积分 $\varphi_2=x^2+y^2+z^2.$

所以，原方程通解为

$$u=\Phi(3z+4x+5y,z^2+x^2+y^2),$$

其中 Φ 为任意二元连续可微函数.

(3) 特征方程组为

$$\frac{dx}{mz-ny}=\frac{dy}{nx-lz}=\frac{dz}{ly-mx}.$$

将第一、二、三分式分别乘以 l,m,n 后，分子、分母分别相加，由比例性质，得

$$\frac{ldx}{lmz-lny}=\frac{mdy}{mnx-mlz}=\frac{ndz}{nly-nmx}=\frac{ldx+mdy+ndz}{0},$$

知
$$d(lx+my+nz)=0,$$

得第一个首次积分 $\varphi_1=lx+my+nz.$

将第一、二、三分式分别乘以 $2x,2y,2z$ 后，分子、分母分别相加，由比例性质，得

$$\frac{2xdx}{2x(mz-ny)}=\frac{2ydy}{2y(nx-lz)}=\frac{2zdz}{2z(ly-mx)}$$
$$=\frac{2xdx+2ydy+2zdz}{0},$$

知
$$d(x^2+y^2+z^2)=0,$$

得第二个首次积分 $\varphi_2=x^2+y^2+z^2.$

所以，原方程通解为

$$u=\Phi(\varphi_1,\varphi_2)=\Phi(lx+my+nz,x^2+y^2+z^2).$$

其中 Φ 为任意二元连续可微函数.

（4）特征方程组为

$$\frac{\mathrm{d}x}{x}=\frac{\mathrm{d}y}{y}=\frac{\mathrm{d}z}{z+\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

将第一、二、三分式分别乘以 x,y,z 后，分子、分母分别相加，得

$$\frac{x\mathrm{d}x}{x^2}=\frac{y\mathrm{d}y}{y^2}=\frac{z\mathrm{d}z}{z^2+z\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

由比例性质，得

$$\frac{\mathrm{d}z}{z+\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z}{x^2+y^2+z^2+z\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

则 $$\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}z}{z\sqrt{x^2+y^2+z^2}+x^2+y^2+z^2}=\frac{\mathrm{d}(x^2+y^2+z^2)/2}{x^2+y^2+z^2+z\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

故 $$\frac{\mathrm{d}(x^2+y^2+z^2)}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\mathrm{d}z.$$

两次积分，得第一个首次积分

$$\varphi_1=\sqrt{x^2+y^2+z^2}-z.$$

又由 $\frac{\mathrm{d}x}{x}=\frac{\mathrm{d}y}{y}$，两端积分，得第二个首次积分 $\varphi_2=x/y$.

所以，原方程通解为

$$u=\Phi(\varphi_1,\varphi_2)=\Phi(\sqrt{x^2+y^2+z^2}-z,x/y).$$

其中 Φ 为任意二元连续可微函数.

例 7 求下列方程组的通解：

(1) $xz\frac{\partial u}{\partial x}+yz\frac{\partial u}{\partial y}+xy\frac{\partial u}{\partial z}=0$；

(2) $\frac{B-C}{A}yz\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{C-A}{B}zx\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{A-B}{C}xy\frac{\partial u}{\partial z}=0$；

(3) $\frac{\partial u}{\partial x}+\left(1-\frac{1}{z}\right)\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{y-x}\frac{\partial u}{\partial z}=0$；

(4) $\frac{1}{x_1}\frac{\partial u}{\partial x_1}+\frac{1}{x_2}\frac{\partial u}{\partial x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\frac{\partial u}{\partial x_n}=0.$

解 (1) 特征方程组为 $\frac{\mathrm{d}x}{xz}=\frac{\mathrm{d}y}{yz}=\frac{\mathrm{d}z}{xy}.$

由第一个等式,得第一个首次积分

$$\varphi_1=\frac{x}{y}.$$

由第二个等式,代入 $x=C_1y$,得第二个首次积分

$$\varphi_2=xy-z^2.$$

所以,原方程通解为

$$u=\Phi(\varphi_1,\varphi_2)=\Phi\left(\frac{x}{y},xy-z^2\right).$$

(2) 特征方程组为

$$\frac{A\mathrm{d}x}{(B-C)yz}=\frac{B\mathrm{d}y}{(C-A)zx}=\frac{C\mathrm{d}z}{(A-B)xy}.$$

将第一、二分式分别乘以 x,y 后两端积分,得第一个首次积分

$$\varphi_1=\frac{A}{B-C}x^2-\frac{B}{C-A}y^2.$$

将第二、三分式分别乘以 y,z 后两端积分,得第二个首次积分

$$\varphi_2=\frac{B}{C-A}y^2-\frac{C}{A-B}z^2.$$

所以,原方程通解为

$$u=\Phi\left(\frac{A}{B-C}x^2-\frac{B}{C-A}y^2,\frac{B}{C-A}y^2-\frac{C}{A-B}z^2\right).$$

(3) 特征方程组为 $\frac{\mathrm{d}x}{1}=\frac{\mathrm{d}y}{1-1/z}=\frac{\mathrm{d}z}{1/(y-x)}$,即

$$\frac{\mathrm{d}x}{1}=\frac{z\mathrm{d}y}{z-1}=\frac{(y-x)\mathrm{d}z}{1}.$$

将上式中第一分式乘以 $-z$ 后与第二分式的分子、分母分别相加,由比例性质,得

$$\frac{z(\mathrm{d}y-\mathrm{d}x)}{-1}=\frac{(y-x)\mathrm{d}z}{1} \quad 或 \quad \frac{\mathrm{d}y-x}{y-x}+\frac{\mathrm{d}z}{z}=0.$$

两端积分，得第一个首次积分

$$\varphi_1=(y-x)z.$$

由$\frac{\mathrm{d}x}{1}=\frac{\mathrm{d}y}{1-1/z}$得$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=1-\frac{1}{z}$，代入$(y-x)z=C_1$，得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=1-\frac{y-x}{C_1}\Rightarrow\frac{\mathrm{d}(y-x)}{y-x}+\frac{\mathrm{d}x}{C_1}=0.$$

两边积分，得$(y-x)\mathrm{e}^{x/C_1}=C_2$，代入$(y-x)z=C_1$，得第二个首次积分

$$\varphi_2=(y-x)\mathrm{e}^{\frac{x}{(y-x)z}}.$$

所以，原方程通解为

$$u=\Phi\left((y-x)z,(y-x)\mathrm{e}^{\frac{x}{(y-x)z}}\right).$$

(4) 特征方程组为

$$\frac{x_1\mathrm{d}x_1}{1}=\frac{x_2\mathrm{d}x_2}{1}=\cdots=\frac{x_n\mathrm{d}x_n}{1}.$$

对$x_1\mathrm{d}x_1=x_i\mathrm{d}x_i(i=2,3,\cdots,n)$两端积分，得$n-1$个首次积分

$$\varphi_i=x_1^2-x_i^2\quad(i=2,3,\cdots,n).$$

所以，原方程通解为

$$u=\Phi(x_1^2-x_2^2,x_1^2-x_3^2,\cdots,x_1^2-x_n^2).$$

例8 求下列方程柯西问题的解：

(1) $y\frac{\partial z}{\partial x}+x\frac{\partial z}{\partial y}=0,z\Big|_{x=0}=2y$;

(2) $\frac{\partial z}{\partial x}-2x\frac{\partial z}{\partial y}=0,z\Big|_{x=1}=y^2$;

(3) $xz\frac{\partial u}{\partial x}+yz\frac{\partial u}{\partial y}-(x^2+y^2)\frac{\partial u}{\partial z}=0,u\Big|_{z=0}=\frac{y}{x}$;

(4) $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{z}{2}\frac{\partial u}{\partial z}=0,u\Big|_{x=1}=y+z^2$.

解 (1) 由例5(1)知，特征方程组的首次积分是$\varphi=x^2-y^2$. 令$-y^2=\bar{\varphi}$，解出$y=\sqrt{-\bar{\varphi}}$. 所以，所求特解为

$$z=2\sqrt{-\varphi}=2\sqrt{y^2-x^2}.$$

（2）特征方程组为$\frac{\mathrm{d}x}{1}=\frac{\mathrm{d}y}{-2x}$. 分离变量后积分，得首次积分 $\varphi=x^2+y^2$. 令$1+y=\bar{\varphi}$，解出$y=\bar{\varphi}-1$. 所以，所求特解为

$$z=(\varphi-1)^2=(x^2+y^2-1)^2.$$

（3）特征方程组为

$$\frac{\mathrm{d}x}{xz}=\frac{\mathrm{d}y}{yz}=\frac{\mathrm{d}z}{-(x^2+y^2)}.$$

由$\frac{\mathrm{d}x}{xz}=\frac{\mathrm{d}y}{yz}$化简后两端积分，得第一个首次积分

$$\varphi_1=y/x \quad (=C_1).$$

将$\frac{y}{x}=C_1$代入$\frac{\mathrm{d}x}{xz}=\frac{\mathrm{d}z}{-(x^2+y^2)}$中，并约去$\frac{1}{x}$，得

$$\frac{\mathrm{d}x}{z}=\frac{\mathrm{d}z}{-(1+C_1^2)x} \Rightarrow (1+C_1^2)x\mathrm{d}x+z\mathrm{d}z=0.$$

积分后代入$C_1=y/x$，得第二个首次积分

$$\varphi_2=x^2+y^2+z^2.$$

由

$$\begin{cases}\frac{y}{x}=\bar{\varphi}_1,\\ x^2+y^2=\bar{\varphi}_2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=\sqrt{\frac{\bar{\varphi}_2}{1+\bar{\varphi}_1^2}},\\ y=\sqrt{\frac{\bar{\varphi}_1^2\bar{\varphi}_2}{1+\bar{\varphi}_1^2}},\end{cases}$$

所以，所求特解为

$$u=\left(\frac{\varphi_1^2\varphi_2}{1+\varphi_1^2}\Big/\frac{\varphi_2}{1+\varphi_1^2}\right)^{1/2}=\varphi_1=\frac{y}{x}.$$

（4）特征方程组为

$$\frac{\mathrm{d}x}{x}=\frac{\mathrm{d}y}{y}=\frac{2\mathrm{d}z}{z}.$$

由$\frac{\mathrm{d}x}{x}=\frac{\mathrm{d}y}{y}$得第一个首次积分

$$\varphi_1=\frac{y}{x}.$$

由$\frac{\mathrm{d}y}{y}=\frac{2\mathrm{d}z}{z}$得第二个首次积分

$$\varphi_2=\frac{z^2}{y}.$$

由 $\begin{cases} y=\bar{\varphi}_1, \\ \dfrac{z^2}{y}=\bar{\varphi}_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=\bar{\varphi}_1, \\ z=\sqrt{\bar{\varphi}_2\bar{\varphi}_1}, \end{cases}$

所以，所求特解为

$$u=\varphi_1+\varphi_1\varphi_2=\frac{y+z^2}{x}.$$

例 9 求下列方程柯西问题的解：

(1) $\sqrt{x}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\sqrt{y}\dfrac{\partial u}{\partial y}+\sqrt{z}\dfrac{\partial u}{\partial z}=0, u\Big|_{x=1}=y-z$；

(2) $x(y^2+z^2)\dfrac{\partial u}{\partial x}+y(z^2+x^2)\dfrac{\partial u}{\partial y}+z(y^2-x^2)\dfrac{\partial u}{\partial z}=0, u\Big|_{x=1}=y^4+z^4$.

解 (1) 特征方程组为

$$\frac{dx}{\sqrt{x}}=\frac{dy}{\sqrt{y}}=\frac{dz}{\sqrt{z}}.$$

由 $\dfrac{dx}{\sqrt{x}}=\dfrac{dy}{\sqrt{y}}$，得第一个首次积分

$$\varphi_1=\sqrt{x}-\sqrt{y}.$$

由 $\dfrac{dy}{\sqrt{y}}=\dfrac{dz}{\sqrt{z}}$，得第二个首次积分

$$\varphi_2=\sqrt{y}-\sqrt{z}.$$

所以，原方程通解为

$$u=\Phi(\sqrt{x}-\sqrt{y},\sqrt{y}-\sqrt{z}).$$

当 $x=1$ 时，$u=y-z$，即 $\Phi(1-\sqrt{y},\sqrt{y}-\sqrt{z})=y-z$. 令

$$1-\sqrt{y}=\bar{\varphi}_1,\quad \sqrt{y}-\sqrt{z}=\bar{\varphi}_2,$$

则 $\Phi(\bar{\varphi}_1,\bar{\varphi}_2)=(1-\bar{\varphi}_1)^2-(1-\bar{\varphi}_1-\bar{\varphi}_2)^2=\bar{\varphi}_2(2-2\bar{\varphi}_1-\bar{\varphi}_2)$，

所以，所求特解为

$$u=\Phi(\varphi_1,\varphi_2)=(\sqrt{y}-\sqrt{z})(2-2\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}).$$

(2) 特征方程组为

$$\frac{\mathrm{d}x}{x(y^2+z^2)}=\frac{\mathrm{d}y}{y(z^2+x^2)}=\frac{\mathrm{d}z}{z(y^2-x^2)}.$$

将第一、二、三分式分别乘以 $x,-y,z$ 后，分子、分母分别相加，由比例性质，得

$$\frac{x\mathrm{d}x}{x^2(y^2+z^2)}=\frac{-y\mathrm{d}y}{-y^2(z^2+x^2)}=\frac{z\mathrm{d}z}{z^2(y^2-x^2)}=\frac{x\mathrm{d}x-y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z}{0}.$$

故由 $x\mathrm{d}x-y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z=0$，得第一个首次积分

$$\varphi_1=x^2-y^2+z^2.$$

再由 $\frac{z\mathrm{d}y+y\mathrm{d}z}{yz}=\frac{\mathrm{d}x}{x}$，得第二个首次积分

$$\varphi_2=\frac{yz}{x}.$$

所以，原方程通解为

$$u=\Phi\left(x^2-y^2+z^2,\frac{yz}{x}\right).$$

由 $u\Big|_{x=1}=y^4+z^4$，得

$$\Phi(1-y^2+z^2,yz)=y^4+z^4.$$

令 $1-y^2+z^2=\bar{\varphi}_1,yz=\bar{\varphi}_2$，则

$$\Phi(\bar{\varphi}_1,\bar{\varphi}_2)=(y^2-z^2)^2+2y^2z^2=(\bar{\varphi}_1-1)^2+2\bar{\varphi}_2^2,$$

所以，所求特解为

$$u=\Phi(\varphi_1,\varphi_2)=(x^2-y^2+z^2-1)^2+2\,\frac{y^2z^2}{x^2}.$$

例 10 写出下列各连续可微函数所满足的一阶偏微分方程：

(1) $z=\Phi(x^2+y^2)$； (2) $z=\Phi(x+y)$；

(3) $z=\Phi(xy)$； (4) $u=\Phi(x-y,y-z)$.

解 (1) 因为 $\frac{\partial z}{\partial x}=2x\Phi'$，$\frac{\partial z}{\partial y}=2y\Phi'$，所以，有

$$y\,\frac{\partial z}{\partial x}-x\,\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

(2) 因为 $\frac{\partial z}{\partial x}=\Phi'$，$\frac{\partial z}{\partial y}=\Phi'$，所以，有

$$\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

(3) 因为$\frac{\partial z}{\partial x}=y\Phi'$，$\frac{\partial z}{\partial y}=x\Phi'$，所以，有

$$x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

(4) 令$\xi=x-y$，$\eta=y-z$，得$y=\eta+z$，$x=\xi+\eta+z$. 故有

$$u(x,y,z)=u(\xi+\eta+z,\eta+z,z)=\Phi(\xi,\eta).$$

从而 $\frac{\partial u}{\partial x}=\Phi'_\xi\frac{\partial \xi}{\partial x}=\Phi'_\xi$，$\frac{\partial u}{\partial y}=-\Phi'_\xi+\Phi'_\eta$，$\frac{\partial u}{\partial z}=-\Phi'_\eta$.

所以，有 $$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=0.$$

例 11 证明满足一阶常系数方程$a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=0$的二元函数形如$z=\Phi(bx-ay)$，其中$\Phi$是任意的连续可微函数.

证 特征方程组为$\frac{\mathrm{d}x}{a}=\frac{\mathrm{d}y}{b}$，其首次积分为

$$\varphi=bx-ay.$$

当$a=0$时，首次积分为$\varphi=x$；当$b=0$时，首次积分为$\varphi=y$.

综合上述结果可知，方程通解为

$$z=\Phi(\varphi)=\Phi(bx-ay).$$

例 12 证明满足一阶常系数方程

$$a_1\frac{\partial u}{\partial x_1}+a_2\frac{\partial u}{\partial x_2}+\cdots+a_n\frac{\partial u}{\partial x_n}=0$$

的n元函数形如$u=\Phi(a_2x_1-a_1x_2,a_3x_1-a_1x_3,\cdots,a_nx_1-a_1x_n)$，其中$a_i(i=1,2,\cdots,n)$是实数，且不为零；$\Phi$是任意的$n-1$元连续函数.

证 方程的特征方程组为

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{a_1}=\frac{\mathrm{d}x_2}{a_2}=\cdots=\frac{\mathrm{d}x_n}{a_n}.$$

由$\frac{\mathrm{d}x_1}{a_1}=\frac{\mathrm{d}x_i}{a_i}(i=2,3,\cdots,n)$可得$n-1$个首次积分

$$\varphi_{i-1}=a_i x_1-a_1 x_i \quad (i=2,3,\cdots,n),$$

所以，方程的通解为

$$\begin{aligned} u &= \Phi(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_{n-1}) \\ &= \Phi(a_2 x_1-a_1 x_2, a_3 x_1-a_1 x_3,\cdots,a_n x_1-a_1 x_n). \end{aligned}$$

第三节　一阶拟线性齐次偏微分方程

主要内容

形如

$$X_1(x_1,x_2,\cdots,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_1}+X_2(x_1,x_2,\cdots,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_2}+\cdots$$
$$+X_n(x_1,x_2,\cdots,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_n}=R(x_1,x_2,\cdots,x_n,u) \qquad ①$$

的方程称为一阶拟线性非齐次偏微分方程．“拟线性”是指各系数 $X_i(i=1,2,\cdots,n)$ 中可能含有未知函数 u.

1．拟线性非齐次偏微分方程的求解，是化为求解线性齐次方程来解决.

2．求拟线性方程的柯西问题解.

疑难解析

1．怎样求一阶拟线性非齐次偏微分方程的通解？

答　求一阶拟线性非齐次偏微分方程通解的步骤如下.

(1) 因为，若 $V(x_1,x_2,\cdots,x_n,u)=0$ 是方程①的隐式解，则方程①可化为一阶线性齐次偏微分方程

$$X_1(x_1,x_2,\cdots,x_n,u)\frac{\partial V}{\partial x_1}+X_2(x_1,x_2,\cdots,x_n,u)\frac{\partial V}{\partial x_2}+\cdots$$

$$+X_n(x_1,x_2,\cdots,x_n,u)\frac{\partial V}{\partial x_n}+R(x_1,x_2,\cdots,x_n,u)\frac{\partial V}{\partial u}=0, \quad ②$$

故可写出方程②的特征方程组

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{X_1}=\frac{\mathrm{d}x_2}{X_2}=\cdots=\frac{\mathrm{d}x_n}{X_n}=\frac{\mathrm{d}u}{R}, \quad ③$$

从而，可求出特征方程组③的 n 个独立的首次积分.

实际上，这一步就是写出特征方程组③，并求出 n 个独立的首次积分

$$\varphi_i(x_1,x_2,\cdots,x_n,u)=C_i \quad (i=1,2,\cdots,n).$$

(2) 由 n 个首次积分写出齐次偏微分方程②的通解

$$V=\Phi(\varphi_1(x_1,x_2,\cdots,x_n,u),\cdots,\varphi_n(x_1,x_2,\cdots,x_n,u)).$$

(3) 令 $V=0$，即得一阶拟线性非齐次偏微分方程的通解.

例如，求方程 $x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=z^2$ 的通解.

其特征方程组为

$$\frac{\mathrm{d}x}{x^2}=\frac{\mathrm{d}y}{y^2}=\frac{\mathrm{d}z}{z^2}.$$

由 $\frac{\mathrm{d}x}{x^2}=\frac{\mathrm{d}y}{y^2}$ 得第一个首次积分

$$\varphi_1=\frac{1}{x}-\frac{1}{y}.$$

由 $\frac{\mathrm{d}x}{x^2}=\frac{\mathrm{d}z}{z^2}$ 得第二个首次积分

$$\varphi_2=\frac{1}{x}-\frac{1}{z}.$$

写出齐次偏微分方程的通解为

$$V=\Phi(\varphi_1,\varphi_2)=\Phi\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y},\frac{1}{x}-\frac{1}{z}\right).$$

所以，原方程通解为

$$\Phi\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y},\frac{1}{x}-\frac{1}{z}\right)=0 \quad 或 \quad \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=f\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{z}\right).$$

2. 求一阶拟线性非齐次偏微分方程柯西(初值)问题解有哪些步骤?

答 求解步骤可归纳如下.

(1) 写出对应齐次偏微分方程②的特征方程组③,求出它的n个独立的首次积分

$$\varphi_i(x_1,x_2,\cdots,x_n,u) \quad (i=1,2,\cdots,n).$$

(2) 建立等式组

$$\begin{cases}\varphi_1(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},x_n^0)=\bar{\varphi}_1,\\ \varphi_2(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},x_n^0)=\bar{\varphi}_2,\\ \quad\vdots\\ \varphi_n(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},x_n^0)=\bar{\varphi}_n,\end{cases}$$

其中,初始条件为$u\Big|_{x_n=x_n^0}=u-\psi(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1})$. 由此解出$x_1,x_2,\cdots,x_n,u$.

$$\begin{cases}x_1=\omega_1(\bar{\varphi}_1,\bar{\varphi}_2,\cdots,\bar{\varphi}_n),\\ x_2=\omega_2(\bar{\varphi}_1,\bar{\varphi}_2,\cdots,\bar{\varphi}_n),\\ \quad\vdots\\ x_{n-1}=\omega_{n-1}(\bar{\varphi}_1,\bar{\varphi}_2,\cdots,\bar{\varphi}_n),\\ u=\omega_n(\bar{\varphi}_1,\bar{\varphi}_2,\cdots,\bar{\varphi}_n).\end{cases}$$

(3) 构成满足初始条件的隐函数形式解(积分)

$$\omega_n(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n)-\psi(\omega_1(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n),\omega_2(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n),\cdots,\omega_{n-1}(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n))=\Phi(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n).$$

例如,求方程$(mz-ny)\dfrac{\partial z}{\partial x}+(nx-lz)\dfrac{\partial z}{\partial y}=ly-mx$ 的满足 $x=a, y^2+z^2=a^2$ 的解,其中l,m,n 为常数.

其特征方程组为

$$\frac{\mathrm{d}x}{mz-ny}=\frac{\mathrm{d}y}{nx-lz}=\frac{\mathrm{d}z}{ly-mx}.$$

由本章第二节例6(3)知,它的两个首次积分为

$$\varphi_1=x^2+y^2+z^2,\quad \varphi_2=lx+my+nz.$$

又由两个首次积分与初始条件$x=a, x^2+y^2=a^2$，得

$$x^2+y^2+z^2=2a^2.$$

所以，满足初始条件的解为

$$x^2+y^2+z^2=2a^2.$$

方法、技巧与典型例题分析

例1 求下列各方程的通积分：

(1) $y\frac{\partial z}{\partial x}=z$；　　(2) $y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=x^2-y^2$；

(3) $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=2z$；　　(4) $x^2\frac{\partial z}{\partial x}-xy\frac{\partial z}{\partial y}=-y^2$.

解 按疑难解析1的步骤求解.

(1) 特征方程组为

$$\frac{\mathrm{d}x}{y}=\frac{\mathrm{d}y}{0}=\frac{\mathrm{d}z}{z}.$$

由$\mathrm{d}y=0$，得第一个首次积分

$$\varphi_1=y\quad(=C_1).$$

将$y=C_1$代入等式$\frac{\mathrm{d}x}{y}=\frac{\mathrm{d}z}{z}$中后积分，有$\frac{x}{C_1}=\ln|z|-\ln|C_2|$，得第二个首次积分

$$\varphi_2=z\mathrm{e}^{-x/C_1}=z\mathrm{e}^{-x/y}.$$

所以，方程的通积分为

$$\Phi(y, z\mathrm{e}^{-x/y})=0.$$

(2) 特征方程组为

$$\frac{\mathrm{d}x}{y}=\frac{\mathrm{d}y}{-x}=\frac{\mathrm{d}z}{x^2-y^2}.$$

由$\frac{\mathrm{d}x}{y}=\frac{\mathrm{d}y}{-x}$，得第一个首次积分

$$\varphi_1=x^2+y^2.$$

将特征方程组一、二分式分别乘以y, x后，利用比例性质，得

$$\frac{dx}{y}=\frac{dy}{-x}=\frac{dz}{x^2-y^2}=\frac{ydx+xdy+dz}{0},$$

知 $d(xy+z)=0$，得第二个首次积分

$$\varphi_2=xy+z.$$

所以，原方程通积分为

$$\Phi(x^2+y^2,xy+z)=0.$$

(3) 特征方程组为

$$\frac{dx}{1}=\frac{dy}{1}=\frac{dz}{2z}.$$

由 $\frac{dx}{1}=\frac{dy}{1}$，得第一个首次积分

$$\varphi_1=x-y.$$

由 $\frac{dy}{1}=\frac{dz}{2z}$，得第二个首次积分

$$\varphi_2=ze^{-2y}.$$

所以，原方程通积分为

$$\Phi(x-y,ze^{-2y})=0.$$

(4) 特征方程组为

$$\frac{dx}{x^2}=\frac{dy}{-yx}=\frac{dz}{-y^2}.$$

由 $\frac{dx}{x^2}=\frac{dy}{-xy}$，得第一个首次积分

$$\varphi_1=xy.$$

由 $\frac{dy}{-xy}=\frac{dz}{-y^2}\left(代入\ x=\frac{C_1}{y}\right)$，得 $y^2dy-C_1dz=0$. 积分后，得第二个首次积分

$$\varphi_2=y^3-3xyz.$$

所以，原方程通积分为

$$\Phi(xy,y^3-3xyz)=0 \quad 或 \quad 3xyz=y^3+f(xy).$$

例 2 求下列方程的通积分：

(1) $\cos y\frac{\partial z}{\partial x}+\cos x\frac{\partial z}{\partial y}=\cos x\cos y$;

(2) $(z+e^x)\frac{\partial z}{\partial x}+(z+e^y)\frac{\partial z}{\partial y}=z^2-e^{x+y}$;

(3) $(y^2+z^2-x^2)\frac{\partial z}{\partial x}-2xy\frac{\partial z}{\partial y}+2xz=0$;

(4) $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}-2u=x^2$.

解 (1) 特征方程组为

$$\frac{dx}{\cos y}=\frac{dy}{\cos x}=\frac{dz}{\cos x\cos y}.$$

由$\frac{dx}{\cos y}=\frac{dy}{\cos x}$,得第一个首次积分

$$\varphi_1=\sin x-\sin y.$$

由$\frac{dy}{\cos x}=\frac{dz}{\cos x\cos y}$,得第二个首次积分

$$\varphi_2=z-\sin y.$$

所以,方程的通积分为

$$\Phi(z-\sin y,\sin x-\sin y)=0.$$

(2) 特征方程组为

$$\frac{dx}{z+e^x}=\frac{dy}{z+e^y}=\frac{dz}{z^2-e^{x+y}}.$$

将一、二、三分式分别乘以$-ze^{-x}$,1,e^{-x}后,分子、分母分别相加,由比例性质,得

$$\frac{dx}{z+e^x}=\frac{dy}{z+e^y}=\frac{dz}{z^2-e^{x+y}}=\frac{-ze^{-x}dx+dy+e^{-x}dz}{0}.$$

则由$-ze^{-x}dx+dy+e^{-x}dz=d(y+ze^{-x})=0$,得第一个首次积分

$$\varphi_1=y+ze^{-x}.$$

再将一、二、三分式分别乘以1,$-ze^{-y}$,e^{-y}后,分子、分母分别相加,由比例性质,得

$$\frac{dx}{z+e^x}=\frac{dy}{z+e^y}=\frac{dz}{z^2-e^{x+y}}=\frac{dx-ze^{-y}dy+e^{-y}dz}{0}.$$

则由$d(x+ze^{-y})=0$,得第二个首次积分

$$\varphi_2=x+ze^{-y}.$$

所以，方程的通积分为

$$\Phi(y+z\mathrm{e}^{-x},x+z\mathrm{e}^{-y})=0.$$

(3) 特征方程组为

$$\frac{\mathrm{d}x}{y^2+z^2-x^2}=\frac{\mathrm{d}y}{-2xy}=\frac{\mathrm{d}z}{-2xz}.$$

由$\frac{\mathrm{d}y}{-2xy}=\frac{\mathrm{d}z}{-2xz}$化简后积分，得第一个首次积分

$$\varphi_1=\frac{z}{y}.$$

将一、二、三分式分别乘以 $2x,2y,2z$ 后，分子、分母分别相加，由比例性质，得

$$\frac{\mathrm{d}y}{-2xy}=\frac{2x\mathrm{d}x+2y\mathrm{d}y+2z\mathrm{d}z}{2x(y^2+z^2-x^2)-4xy^2-4xz^2},$$

即

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=\frac{\mathrm{d}(x^2+y^2+z^2)}{x^2+y^2+z^2}.$$

积分，得第二个首次积分

$$\varphi_2=\frac{x^2+y^2+z^2}{y}.$$

所以，方程的通积分为

$$\Phi\left(\frac{z}{y},\frac{x^2+y^2+z^2}{y}\right)=0.$$

(4) 特征方程组为

$$\frac{\mathrm{d}x}{x}=\frac{\mathrm{d}y}{y}=\frac{\mathrm{d}z}{z}=\frac{\mathrm{d}u}{x+2u}.$$

由$\frac{\mathrm{d}x}{x}=\frac{\mathrm{d}y}{y}$，得第一个首次积分

$$\varphi_1=\frac{y}{x}.$$

由$\frac{\mathrm{d}y}{y}=\frac{\mathrm{d}z}{z}$，得第二个首次积分

$$\varphi_2=\frac{z}{y}.$$

由$\frac{dx}{x}=\frac{du}{x^2+2u}$得$x^2dx+2udx=xdu$，将等式两端乘以$x^{-2}$后移项，得

$$\frac{dx}{x}=\frac{du}{x^2}-\frac{2udx}{x^3}\Rightarrow\frac{dx}{x}=d\left(\frac{u}{x^2}\right).$$

积分，得第三个首次积分

$$\varphi_3=\frac{u}{x^2}-\ln|x|.$$

所以，方程的通积分为

$$\Phi\left(\frac{y}{x},\frac{z}{y},\frac{u}{x^2}-\ln|x|\right)=0.$$

例3 求下列方程的通积分：

(1) $(u+y+z)\frac{\partial u}{\partial x}+(u+x+z)\frac{\partial u}{\partial y}+(u+x+y)\frac{\partial u}{\partial z}=x+y+z$；

(2) $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=xyz$；

(3) $xz(xy+z^2)\frac{\partial z}{\partial x}-yz(xy+z^2)\frac{\partial z}{\partial y}=x^4$.

解 (1) 特征方程组为

$$\frac{dx}{u+y+z}=\frac{dy}{u+x+z}=\frac{dz}{u+x+y}=\frac{du}{x+y+z}.$$

由比例性质，得

$$\frac{du+dx+dy+dz}{3(x+y+z+u)}=\frac{du-dx}{x-u}=\frac{du-dy}{y-u}=\frac{du-dz}{z-u}.$$

由$\frac{du+dx+dy+dz}{3(x+y+z+u)}=-\frac{d(x-u)}{x-u}$，得第一个首次积分

$$\varphi_1=(x-u)(x+y+z+u)^{1/3}.$$

由$\frac{du+dx+dy+dz}{3(x+y+z+u)}=-\frac{d(y-u)}{y-u}$，得第二个首次积分

$$\varphi_2=(y-u)(x+y+z+u)^{1/3}.$$

由$\frac{du+dx+dy+dz}{3(x+y+z+u)}=-\frac{d(z-u)}{z-u}$，得第三个首次积分

$$\varphi_3=(z-u)(x+y+z+u)^{1/3}.$$

所以,方程的通积分为

$$\Phi((x-u)(x+y+z+u)^{1/3},(y-u)(x+y+z+u)^{1/3},(z-u)(x+y+z+u)^{1/3})=0.$$

(2) 特征方程组为

$$\frac{\mathrm{d}x}{x}=\frac{\mathrm{d}y}{y}=\frac{\mathrm{d}z}{z}=\frac{\mathrm{d}u}{xyz}.$$

由$\frac{\mathrm{d}x}{x}=\frac{\mathrm{d}y}{y}$,得第一个首次积分

$$\varphi_1=\frac{y}{x}.$$

由$\frac{\mathrm{d}x}{x}=\frac{\mathrm{d}z}{z}$,得第二个首次积分

$$\varphi_2=\frac{x}{z}.$$

在$\frac{\mathrm{d}x}{x}=\frac{\mathrm{d}u}{xyz}$中,代入$y=C_1x,z=\frac{x}{C_2}$,得

$$\frac{\mathrm{d}x}{x}=\frac{\mathrm{d}u}{C_1x^3/C_2}\overset{\text{积分}}{\Longrightarrow}\frac{C_1}{C_2}x^3-3u=C_3.$$

将C_1,C_2代回,得第三个首次积分

$$\varphi_3=xyz-3u.$$

所以,方程的通积分为

$$\Phi\left(\frac{y}{x},\frac{x}{z},xyz-3u\right)=0\quad\text{或}\quad 3u=xyz+f\left(\frac{y}{x},\frac{x}{z}\right).$$

(3) 特征方程组为

$$\frac{\mathrm{d}x}{xz(xy+z^2)}=\frac{\mathrm{d}y}{-yz(xy+z^2)}=\frac{\mathrm{d}z}{x^4}.$$

由$\frac{\mathrm{d}x}{xz(xy+z^2)}=\frac{\mathrm{d}y}{-yz(xy+z^2)}$,得第一个首次积分

$$\varphi_1=xy\quad(=C_1).$$

对$\frac{\mathrm{d}x}{xz(xy+z^2)}=\frac{\mathrm{d}z}{x^4}$,代入$xy=C_1$,得

$$x^3\mathrm{d}x=z(C_1+z^2)\mathrm{d}x\overset{\text{积分}}{\Longrightarrow}x^4=2C_1z^2+z^4+C_2.$$

将C_1代回，得第二个首次积分

$$\varphi_2=x^4-2xyz^2-z^4.$$

所以，方程的通积分为

$$\Phi(xy,x^4-2xyz^2-z^4)=0.$$

例4 求下列柯西问题的解：

(1) $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=2z,z\Big|_{x=1}=y$;

(2) $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+(y+x^2)\dfrac{\partial z}{\partial y}=z,z\Big|_{x=2}=y-4$;

(3) $x\dfrac{\partial z}{\partial x}-2x\dfrac{\partial z}{\partial y}=z,z\Big|_{x=1}=y^2$;

(4) $(y-bz)\dfrac{\partial z}{\partial x}-(x-az)\dfrac{\partial z}{\partial y}=bx-ay\ (b\neq-1),z\Big|_{x=0}=y$.

解 (1) 特征方程组为

$$\frac{\mathrm{d}x}{x}=\frac{\mathrm{d}y}{y}=\frac{\mathrm{d}z}{2z}.$$

由$\dfrac{\mathrm{d}x}{x}=\dfrac{\mathrm{d}y}{y}$，得第一个首次积分$\dfrac{y}{x}$.

由$\dfrac{\mathrm{d}x}{x}=\dfrac{\mathrm{d}z}{2z}$，得第二个首次积分$\dfrac{z}{x^2}$.

由$y=\bar{\varphi}_1,z=\bar{\varphi}_2$得，所求积分为$\varphi_2-\varphi_1=\dfrac{z}{x^2}-\dfrac{y}{x}=0$. 故所求解为

$$z=xy.$$

(2) 特征方程组为

$$\frac{\mathrm{d}x}{x}=\frac{\mathrm{d}y}{y+x^2}=\frac{\mathrm{d}z}{z}.$$

由$\dfrac{\mathrm{d}x}{x}=\dfrac{2x\mathrm{d}x}{2x^2}=\dfrac{\mathrm{d}y}{y+x^2}$，利用比例性质，有

$$\frac{\mathrm{d}x}{x}=\frac{\mathrm{d}y-\mathrm{d}x^2}{y-x^2}\Rightarrow\frac{\mathrm{d}x}{x}=\frac{\mathrm{d}(y-x^2)}{y-x^2},$$

得第一个首次积分 $\varphi_1=\dfrac{y-x^2}{x}$.

由$\frac{\mathrm{d}x}{x}=\frac{\mathrm{d}z}{z}$,得第二个首次积分

$$\varphi_2=\frac{z}{x}.$$

利用初始条件$x=2,z=y-4$知$\frac{z}{x}=\frac{y-x^2}{x}$. 所以,方程的初值问题解为

$$z=y-x^2.$$

(3) 特征方程组为

$$\frac{\mathrm{d}x}{x}=\frac{\mathrm{d}y}{-2x}=\frac{\mathrm{d}z}{z}.$$

由$\frac{\mathrm{d}x}{x}=\frac{\mathrm{d}y}{-2x}$,得第一个首次积分

$$\varphi_1=2x+y.$$

由$\frac{\mathrm{d}x}{x}=\frac{\mathrm{d}z}{z}$,得第二个首次积分

$$\varphi_2=\frac{z}{x}.$$

所以,方程的通解为$\Phi\left(2x+y,\frac{z}{x}\right)=0$,即$z=xf(2x+y)$. 代入初始条件$z(1,y)=y^2$,得

$$f(y+2)=y^2\Rightarrow f(t)=t^2-4t+4,$$

故 $$f(2x+y)=(2x+y)^2-4(2x+y)+4=(y+2x-2)^2.$$

于是,所求特解为

$$z=x(y+2x-2)^2.$$

(4) 特征方程组为

$$\frac{\mathrm{d}x}{y-bz}=\frac{\mathrm{d}y}{-(x-az)}=\frac{\mathrm{d}z}{bx-ay}.$$

得 $$\frac{a\mathrm{d}x}{ay-abz}=\frac{b\mathrm{d}y}{-bx+abz}=\frac{\mathrm{d}z}{bx-ay}=\frac{a\mathrm{d}x+b\mathrm{d}y+\mathrm{d}z}{0}.$$

由$\mathrm{d}(ax+by+z)=0$,得第一个首次积分

$$\varphi_1=ax+by+z.$$

再将特征方程组中一、二、三分式分别乘以 $2x,2y,2z$ 后相加，按比例性质，得

$$\frac{2x\mathrm{d}x}{2xy-2bxz}=\frac{2y\mathrm{d}y}{-2yx+2ayz}=\frac{2z\mathrm{d}z}{2bxz-2ayz}=\frac{\mathrm{d}(x^2+y^2+z^2)}{0}.$$

则由 $\mathrm{d}(x^2+y^2+z^2)=0$，得第二个首次积分

$$\varphi_2=x^2+y^2+z^2.$$

代入初始条件 $x=0,z=y$，则有

$$ax+by+z=C_1,\quad x^2+y^2+z^2=C_2\Rightarrow 2\left(\frac{C_1}{b+1}\right)^2=C_2,$$

所以，所求特解为

$$x^2+y^2+z^2=2\left(\frac{ax+by+z}{b+1}\right)^2.$$

例 5 求下列方程的柯西问题解：

(1) $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}+z\dfrac{\partial u}{\partial z}=u,u\Big|_{x=2}=\dfrac{1}{2}(y+z)$；

(2) $\sqrt{x}\dfrac{\partial z}{\partial x}+\sqrt{y}\dfrac{\partial z}{\partial y}=z,z\Big|_{x=1}=\sin 2y$；

(3) $\sqrt{x}\dfrac{\partial z}{\partial x}+\sqrt{y}\dfrac{\partial z}{\partial y}=\sqrt{z},z\Big|_{y=0}=\ln x$；

(4) $\dfrac{\partial z}{\partial y}=z,z\Big|_{x=0}=\mathrm{e}^{my}$（$m$ 是常数）.

解 (1) 特征方程组为

$$\frac{\mathrm{d}x}{x}=\frac{\mathrm{d}y}{y}=\frac{\mathrm{d}z}{z}=\frac{\mathrm{d}u}{u}.$$

由 $\dfrac{\mathrm{d}x}{x}=\dfrac{\mathrm{d}y}{y}$，得第一个首次积分

$$\varphi_1=\frac{y}{x}.$$

由 $\dfrac{\mathrm{d}x}{x}=\dfrac{\mathrm{d}z}{z}$，得第二个首次积分

$$\varphi_2=\frac{z}{x}.$$

由$\frac{dx}{x}=\frac{du}{u}$,得第三个首次积分

$$\varphi_3=\frac{u}{x}.$$

代入初始条件$x=2, u=\frac{1}{2}(y+z)$,有

$$\frac{y}{2}=\bar{\varphi}_1, \quad \frac{z}{2}=\bar{\varphi}_2, \quad \frac{u}{2}=\bar{\varphi}_3 \Rightarrow y=2\bar{\varphi}_1, \quad z=2\bar{\varphi}_2, \quad u=2\bar{\varphi}_3,$$

得
$$2\bar{\varphi}_3=\frac{1}{2}(2\bar{\varphi}_1+2\bar{\varphi}_2).$$

所以,所求特解为

$$u=\frac{1}{2}(y+z).$$

(2) 特征方程组为

$$\frac{dx}{\sqrt{x}}=\frac{dy}{\sqrt{y}}=\frac{dz}{z}.$$

由$\frac{dx}{\sqrt{x}}=\frac{dy}{\sqrt{y}}$,得第一个首次积分

$$\varphi_1=\sqrt{x}-\sqrt{y}.$$

由$\frac{dx}{\sqrt{y}}=\frac{dz}{z}$,得第二个首次积分

$$\varphi_2=2\sqrt{y}-\ln|z|.$$

所以,原方程通解为

$$\Phi(\sqrt{x}-\sqrt{y}, 2\sqrt{y}-\ln|z|)=0.$$

即 $2\sqrt{y}-\ln|z|=\omega(\sqrt{x}-\sqrt{y}) \Rightarrow z=\pm e^{2\sqrt{y}-\omega(\sqrt{x}-\sqrt{y})}$

或
$$z=e^{2\sqrt{y}}\psi(\sqrt{x}-\sqrt{y}).$$

代入$x=1, z=\sin 2y$,得

$$e^{2\sqrt{y}}\psi(1-\sqrt{y})=\sin 2y \Rightarrow \psi(1-\sqrt{y})=e^{-2\sqrt{y}}\sin 2y$$

即
$$\psi(t)=e^{2(t-1)}\sin[2(1-t)^2] \quad (t=1-\sqrt{y}).$$

于是,所求柯西问题解为

$$z=e^{2(\sqrt{x}-1)}\sin[2(1-\sqrt{x}+\sqrt{y})^2].$$

(3) 特征方程组为

$$\frac{dx}{\sqrt{x}}=\frac{dy}{\sqrt{y}}=\frac{dz}{\sqrt{z}}.$$

由$\frac{dx}{\sqrt{x}}=\frac{dy}{\sqrt{y}}$,得第一个首次积分

$$\varphi_1=\sqrt{x}-\sqrt{y}.$$

由$\frac{dy}{\sqrt{y}}=\frac{dz}{\sqrt{z}}$,得第二个首次积分

$$\varphi_2=\sqrt{y}-\sqrt{z}.$$

所以,原方程通解为

$$\Phi(\sqrt{x}-\sqrt{y},\sqrt{y}-\sqrt{z})=0.$$

其显式通解为 $z=[\sqrt{y}-\psi(\sqrt{y}-\sqrt{z})]^2$.

代入初始条件$y=0,z=\ln x$,得

$$[\psi(\sqrt{x})]^2=\ln x \Rightarrow \psi(\sqrt{x})=-\sqrt{\ln x}$$

(因为$\sqrt{y}-\sqrt{z}=\psi(\sqrt{x}-\sqrt{y})$知,$y=0$时$\psi(\sqrt{x})$为负.)

故 $$\psi(t)=-\sqrt{\ln t^2}.$$

于是,所求柯西问题解为

$$z=[\sqrt{y}+\sqrt{\ln(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}]^2.$$

(4) 由$\frac{\partial z}{\partial y}=z$得$\frac{\partial}{\partial y}(ze^{-y})=0$,故有通解

$$z=C(x)e^y,$$

其中$C(x)$是任意的连续函数.

令 $$C(0)e^y=e^{my}, \quad ①$$

若$m\neq1$,则不论$C(0)$取何值,式①对y不恒成立,所以柯西问题解不存在;

若$m=1$,则只要$C(0)=1$,使式①成立的$C(x)$有无穷多个,所以柯西问题解有无穷多个.

满足$C(0)=1$ 的连续函数$C(x)$举例如下：

$$1,\quad \cos x,\quad e^x,\quad 1+x^2,\cdots$$

对于一阶拟线性偏微分方程

$$A_1(x,y,u)\frac{\partial u}{\partial x}+A_2(x,y,u)\frac{\partial u}{\partial y}=R(x,y,u),\qquad (*)$$

其解$u(x,y)$在(x,y,u)空间中是一个曲面S，称为式(*)的积分曲面. 积分曲面由特征线"织"成.

例 6 求方程$uu_x+u_y=1$ 分别过空间曲线

(1) $l_1: x=t, y=t, u=0$;

(2) $l_2: x=\frac{1}{2}t^2, y=t, u=t$;

(3) $l_3: x=t^2, y=2t, u=t$

的积分曲面.

解 特征方程组为$\frac{dx}{ds}=u,\frac{dy}{ds}=1,\frac{du}{ds}=1$.

(1) 由 l_1 的参数方程知

$$\Delta=\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}\neq 0\quad \left(\Delta=\begin{vmatrix}A_1 & A_2\\ x_t' & y_t'\end{vmatrix}\right),$$

所以存在唯一的积分曲面含有曲线l_1.

特征方程组的通解为

$$x=C_1+C_3s+\frac{1}{2}s^2,\quad y=C_2+s,\quad u=C_3+s.$$

由初始条件$x\Big|_{s=0}=t=C_1, y\Big|_{s=0}=t=C_2, u\Big|_{s=0}=C_3$ 得

$$x=t+\frac{1}{2}s^2,\quad y=t+s,\quad u=s.$$

消去参数s,t，即得所给柯西问题的解为

$$x-y=\frac{u^2}{2}-u.$$

(2) 由 l_2 的参数方程知

$$\Delta=\begin{vmatrix}t & 1\\ t & 1\end{vmatrix}=0.$$

但沿曲线 l_2，有

$$\frac{x'(t)}{t}=\frac{y'(t)}{1}=\frac{u'(t)}{1}=1,$$

所以 l_2 是特征线，柯西问题的解不唯一.

(3) 由 l_3 的参数方程知

$$\Delta=\begin{vmatrix} t & 1 \\ 2t & 2 \end{vmatrix}=0.$$

但沿曲线 l_3，有

$$2=\frac{x'(t)}{t}=\frac{y'(t)}{t}\neq\frac{u'(t)}{1}=1,$$

故柯西问题无解.

例 7 求方程 $x\frac{\partial z}{\partial y}-y\frac{\partial z}{\partial x}=0$，过 $l: x=0, z=y^2$ 的积分曲面.

解 曲线的参数形式为

$$x=0,\quad y=t,\quad z=t^2.$$

由曲线的参数方程可得

$$\Delta=\begin{vmatrix} -t & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=-t\neq 0 \quad (设 t\neq 0).$$

故方程有唯一的含有所给曲线 l 的积分曲面.

方程的特征方程组为 $\frac{dx}{ds}=-y, \frac{dy}{ds}=x, \frac{dz}{ds}=0$. 它的满足初始条件 $s=0$ 时 $x=0, y=t, z=t^2$ 的解为

$$x=-t\sin s,\quad y=t\cos s,\quad z=t^2.$$

消去参数 t, s，得方程过 l 的积分曲面

$$z=x^2+y^2.$$

［Ｇｅｎｅｒａｌ Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名＝常微分方程　　内容、方法与技巧
作者＝孙清华，李金兰，孙昊著
页数＝４１１
ＳＳ号＝１１８０８７３７
出版日期＝２００６．１２

前言
目录

第一章　初等积分法
第一节　微分方程与解
主要内容
疑难解析
方法、技巧与典型例题分析
第二节　变量可分离方程
主要内容
疑难解析
方法、技巧与典型例题分析
第三节　齐次方程
主要内容
疑难解析
方法、技巧与典型例题分析
第四节　一阶线性方程
主要内容
疑难解析
方法、技巧与典型例题分析
第五节　全微分方程及积分因子
主要内容
疑难解析
方法、技巧与典型例题分析
第六节　线素场欧拉折线
主要内容
疑难解析
方法、技巧与典型例题分析
第七节　一阶隐式微分方程
主要内容
疑难解析
方法、技巧与典型例题分析
第八节　一阶微分方程的等角轨线与应用
主要内容
疑难解析
方法、技巧与典型例题分析
第九节　几种可降阶的高阶方程
主要内容
疑难解析
方法、技巧与典型例题分析
第二章　基本定理
第一节　解的存在性与唯一性定理
主要内容
疑难解析

方法、技巧与典型例题分析
第二节　解的延展
主要内容
疑难解析
方法、技巧与典型例题分析
第三节　解对初值的连续依赖性
主要内容
疑难解析
方法、技巧与典型例题分析
第四节　解对初值的可微性
主要内容
疑难解析
方法、技巧与典型例题分析
第三章　线性微分方程
第一节　线性方程的一般性质
主要内容
疑难解析
方法、技巧与典型例题分析
第二节　n阶线性齐次微分方程
主要内容
疑难解析
方法、技巧与典型例题分析
第三节　n阶线性非齐次方程
主要内容
疑难解析
方法、技巧与典型例题分析
第四节　n阶常系数线性齐次方程解法
主要内容
疑难解析
方法、技巧与典型例题分析
第五节　n阶常系数线性非齐次方程解法
主要内容
疑难解析
方法、技巧与典型例题分析
第六节　拉普拉斯变换
主要内容
疑难解析
方法、技巧与典型例题分析
第七节　二阶常系数线性方程与振动现象
主要内容
疑难解析
方法、技巧与典型例题分析
第八节　幂级数解法大意

主要内容
疑难解析
方法、技巧与典型例题分析
第四章　线性微分方程组
第一节　　一阶微分方程组　　线性微分方程组的一般概念
主要内容
疑难解析
方法、技巧与典型例题分析
第二节　线性齐次方程组的一般理论
主要内容
疑难解析
方法、技巧与典型例题分析
第三节　线性非齐次方程组的一般理论
主要内容
疑难解析
方法、技巧与典型例题分析
第四节　常系数线性微分方程组的解法
主要内容
疑难解析
方法、技巧与典型例题分析
第五章　定性与稳定性概念
第一节　相平面作图初等奇点附近的轨线分布
主要内容
疑难解析
方法、技巧与典型例题分析
第二节　极限环举例
主要内容
疑难解析
方法、技巧与典型例题分析
第三节　稳定性概念
主要内容
疑难解析
方法、技巧与典型例题分析
第六章　一阶偏微分方程初步
第一节　一阶常微分方程组的首次积分
主要内容
疑难解析
方法、技巧与典型例题分析
第二节　一阶线性齐次偏微分方程
主要内容
疑难解析
方法、技巧与典型例题分析
第三节　一阶拟线性齐次偏微分方程

主要内容
疑难解析
方法、技巧与典型例题分析